UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Álgebra Linear — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

Física 05/10/2026

1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

Aluno(a): .....

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + 3z = 2, \\ 3x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

   (a) Escreva o sistema na forma matricial $Ax = b$.

   (b) Determine o posto da matriz dos coeficientes e o posto da matriz aumentada.

   (c) Classifique o sistema quanto à existência e à quantidade de soluções.

   (d) Resolva o sistema.

2. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -1$, considere a matriz $A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 2a & 2b & 2c \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule $\det(A)$. (b) Determine se A é invertível.

3. Considere os vetores $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (2, -1, 1), v_3 = (0, 5, 1)$.

   (a) Verifique se v_3 pode ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2. Em caso afirmativo, determine os coeficientes.

   (b) Determine se o conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente ou dependente.

4. Considere o conjunto $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ das matrizes reais 2×2 e as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique se o conjunto $S = \{A, B, C\}$ é linearmente independente.

   (b) Considere o conjunto $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) : a + d = 0 \right\}$. O conjunto W é subespaço de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$?

5. Em determinado modelo físico, três grandezas x, y e z estão relacionadas pelas restrições

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$

   (a) Determine uma base para o espaço de soluções.

   (b) Determine a dimensão do espaço de soluções.

Boa Prova!

Solução

① a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ posto$[A] = 2$ e posto$[A|b] = 2$

c) Como posto$[A]$ = posto$[A|b] = 2 < 3 = \#$ variáveis, o sistema tem infinitas soluções.

d) Partindo do escalonamento do item b)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -5y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = y$$

$\therefore x + 2y - y = 1 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$

Portanto, $(1-y, y, y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, é sol. do sistema.

ou $(x, 1-x, 1-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ou $(1-z, z, z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$

② Temos que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -1 \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1 \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = -1$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3} \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = -2 \quad \therefore |A| = -2 \neq 0 \text{ e } A \text{ é invertível.}$$

③ a) $(0,5,1) = a(1,2,1) + b(2,-1,1) = (a+2b, 2a-b, a+b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2b=0 & (1) \\ 2a-b=5 & (2) \\ a+b=1 & (3) \end{cases}$$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} a=-2b \overset{(3)}{\Rightarrow} -2b+b=1 \Rightarrow b=-1 \overset{(2)}{\Rightarrow} 2a+1=5 \Rightarrow a=2.$

Logo, v_3 é comb. linear de v_1 e v_2 com $a=2$ e $b=-1$.

b) Como v_3 pode ser escrito como comb. linear de v_1 e v_2, então $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD.

④ a) $a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a+b-c & a+c \\ b+c & a+b-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b-c=0 & (1) \\ a+c=0 \Rightarrow c=-a \\ b+c=0 \Rightarrow c=-b \end{cases} \Rightarrow a=b$$

$(1) \Rightarrow a+a+a=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow c=0.$

Portanto, o conjunto é LI.

b) Sejam $A, B \in W$ e $k \in \mathbb{R}$:

$$A+B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{bmatrix}$$

como $a+\alpha+d+\delta = (a+d)+(\alpha+\delta) = 0+0=0$, $A+B \in W$.

$$kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

como $ka+kd = k(a+d) = k\cdot 0 = 0$, $kA \in W$.

Portanto, W é subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

⑤ Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow z=-x-y$$

$\therefore 2x-y+x+y=0 \Rightarrow 3x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow z=-y.$

Assim, $(0,y,-y), \forall y \in \mathbb{R}$, é sol. do sistema

ou $(0,-z,z), \forall z \in \mathbb{R}$.

a) $(0,y,-y) = y(0,1,-1) \Rightarrow S=\{(0,1,-1)\}$ é base do espaço sol. do sistema.

b) O espaço sol. tem dimensão 1.