1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Elementos de Álgebra — Avaliação PS
Prof. Adriano Barbosa

Matemática 05/12/2024

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas. Resolva apenas a avaliação referente a sua menor nota. A nota máxima da avaliação é 10 pontos.

Avaliação P1:

1. (2 pts) Usando as matrizes abaixo, calcule a matriz $M = B^T(CC^T - A^TA)$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

2. (2 pts) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Mostre que $(I - A)^3 = 0$.

   (b) Use a igualdade $(I - A)^3 = I - 3A + 3A^2 - A^3$ para calcular A^{-1}.

3. (2 pts) Encontre todos os valores de a, b e c tais que A seja simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ a - 2b + 2c & 5 & 7 \\ 2a + b + c & a + c & 0 \end{bmatrix}$$

4. (2 pts) Determine a matriz da transformação que realiza uma rotação de 60° seguida de outra rotação de 30° em torno da origem no sentido anti-horário.

5. (2 pts) Determine para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ o determinante de A é positivo.

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & x \end{bmatrix}$$

6. (2 pts) Calcule o determinante da matrix $A = [a_{ij}]_{6\times 6}$, onde

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{se } i = j \\ (-1)^{|i-j|}, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Avaliação P2:

1. (2 pts) Uma transportadora tem três tipos de caminhões que estão equipados para levar três tipos diferentes de máquinas de acordo com a seguinte tabela:

	Máquina A	Máquina B	Máquina C
Caminhão 1	1	0	2
Caminhão 2	1	1	1
Caminhão 3	1	2	1

Por exemplo, o Caminhão 1 pode levar uma Máquina A, nenhuma Máquina B e duas Máquinas C. Supondo que cada caminhão vai com carga máxima, quantos caminhões de cada tipo devemos enviar para transportar exatamente 12 Máquinas A, 10 Máquinas B e 16 Máquinas C?

2. (2 pts) Dado o sistema linear

$$\begin{cases} 3x + 5y + 12z - w = -3 \\ x + y + 4z - w = -6 \\ 2y + 2z + w = 5 \end{cases}$$

   (a) Determine se o sistema é determinado, indeterminado ou impossível.

   (b) Acrescente a equação $2z - 3kw = 1$ a este sistema, encontre um valor de k que torne o sistema impossível.

3. (2 pts) Sejam a e b números reais e considere os dois sistemas lineares abaixo nas variáveis x, y e z. Sabendo que esses dois sistemas possuem uma solução em comum, qual o valor de $a + b$?

$$\begin{cases} x - y = a \\ z - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = b \end{cases}$$

4. (2 pts) Efetue a divisão de $p(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x - 3$ por $q(x) = x^3 - 2x + 1$.

5. (2 pts) Considere o polinômio $p(x) = x^n + x^m + 1$, em que $n > m \geq 1$. Se o resto da divisão de $p(x)$ por $x + 1$ é igual a 3, o que podemos concluir sobre a paridade de m e n?

6. (2 pts) Sabendo que a é um número real, considere os polinômios $p(x) = x^3 - x^2 + a$ e $q(x) = x^2 + x + 2$. Se $p(x)$ é divisível por $q(x)$, qual o valor de a?

Boa Prova!

Solução da P1

① $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C C^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 17 \\ 17 & 35 \end{bmatrix}$$

$$C C^T - A^T A = \begin{bmatrix} 21 & 17 \\ 17 & 35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 18 & 30 \end{bmatrix}$$

$$B^T (C C^T - A^T A) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 18 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 72 \\ 26 & 42 \end{bmatrix}$$

② a) $I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$(I-A)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(I-A)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $(I-A)^3 = I - 3A + 3A^2 - A^3 \Rightarrow I - 3A + 3A^2 - A^3 = 0$

$\Rightarrow I + (-3I + 3A - A^2)A = 0 \Rightarrow (-3I + 3A - A^2)A = -I$

$\Rightarrow (-3I + 3A - A^2)AA^{-1} = -IA^{-1} \Rightarrow A^{-1} = -(-3I + 3A - A^2)$

$\Rightarrow A^{-1} = 3I - 3A + A^2$.

3 A é simétrica se $A = A^T$:

$$\begin{cases} a - 2b + 2c = 3 & (\text{I}) \\ 2a + b + c = 0 & (\text{II}) \\ a + c = 7 \Rightarrow c = 7 - a & (\text{III}) \end{cases}$$

Substituindo (III) em (II):

$2a + b + 7 - a = 0 \Rightarrow a + b + 7 = 0 \Rightarrow b = -7 - a$

Substituindo em (I):

$a - 2(-7-a) + 2(7-a) = 3 \Rightarrow a + 14 + 2a + 14 - 2a = 3 \Rightarrow a = -25$

$\Rightarrow b = -7 + 25 \Rightarrow b = 18$

e $c = 7 + 25 \Rightarrow c = 32$

4 Realizar uma rotação de 60° seguida de uma de 30° é o mesmo que realizar uma rotação de 90°. Assim,

$$R_{90^\circ} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\operatorname{sen} 90^\circ \\ \operatorname{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Também é possível obter a matriz através do produto (composição) das matrizes de rotação:

$$R_{30^\circ} \cdot R_{60^\circ} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\operatorname{sen} 30^\circ \\ \operatorname{sen} 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\operatorname{sen} 60^\circ \\ \operatorname{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

⑤ Calculando o determinante pela primeira linha:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 6 & x \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x(x-36) - 2(2x-0)$$

$$= x^2 - 36x - 4x = x^2 - 40x = x(x-40)$$

$x(x-40) > 0 \Rightarrow x$ e $x-40$ têm o mesmo sinal

$\Rightarrow x > 0$ e $x - 40 > 0$ ou $x < 0$ e $x - 40 < 0$

$\Rightarrow x > 0$ e $x > 40$ ou $x < 0$ e $x < 40$

$\Rightarrow x > 40$ ou $x < 0$

⑥

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Some as linhas ímpares com a linha 6 e subtraia a linha 6 das linhas pares.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Some as linhas ímpares a linha 6 e subtraia as linhas pares da linha 6.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7$$

Solução da P2

① Sejam x, y e z a quantidade de caminhões do tipo 1, 2 e 3, respectivamente. Queremos a solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 & (I) \\ \quad\;\; y + 2z = 10 & \Rightarrow y = 10 - 2z \quad (II) \\ 2x + y + z = 16 & (III) \end{cases}$$

Subtraindo (I) de (III): $x = 4$

Substituindo (II) em (I):

$$4 + 10 - 2z + z = 12 \Rightarrow z = 2$$

$$\Rightarrow y = 10 - 4 \Rightarrow y = 6.$$

② a) Escalonando a matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 12 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 3 & 5 & 12 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 15 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

Como $\text{posto}(A) = \text{posto}(A|b) = 3 < 4 =$ número de variáveis, o sistema tem infinitas soluções.

b) Ascrescentando a eq. $2z-3kw=1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -3k & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -3k+1 & 11 \end{bmatrix}$$

Para que o sistema seja impossível, precisamos que posto(A) < posto(A|b), logo devemos ter $-3k+1=0 \Rightarrow k=\frac{1}{3}$.

3 Como queremos x, y e z que satisfaçam todas as equações de ambos os sistemas, queremos a sol. do sistema

$$\begin{cases} x-y=a \\ z-y=1 \\ x+y=2 \\ y+z=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a+y & (I) \\ z=1+y & (II) \\ x=2-y & (III) \\ z=b-y & (IV) \end{cases}$$

De (I) e (III): $a+y=2-y \Rightarrow 2y=2-a$ (V)

De (II) e (IV): $1+y=b-y \Rightarrow 2y=b+1$ (VI)

De (V) e (VI): $2-a=b+1 \Rightarrow a+b=3$.

4 Dividindo:

$$\begin{array}{l|l}
3x^5 - x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 4x - 3 & x^3 + 0x^2 - 2x + 1 \\
\underline{-3x^5 - 0x^4 + 6x^3 - 3x^2} & \underbrace{3x^2 - x + 8}_{q(x)} \\
\quad -x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 4x - 3 & \\
\quad \underline{x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x} & \\
\qquad 8x^3 - 5x^2 + 5x - 3 & \\
\qquad \underline{-8x^3 - 0x^2 + 16x - 8} & \\
\qquad \underbrace{-5x^2 + 21x - 11}_{r(x)} &
\end{array}$$

⑤ Sabemos que resto da divisão de $p(x)$ por $x+1$ é $p(-1)$. Logo,

$$3 = p(-1) = (-1)^n + (-1)^m + 1 \Rightarrow m \text{ e } n \text{ devem ser ambos pares.}$$

⑥ Temos que:

$$x^3 - x^2 + a = (x^2+x+2)\cdot Q(x) + r(x) \quad \text{onde, } r(x)=0 \text{ e } Q(x) = \alpha x + \beta$$

$$= (x^2+x+2)(\alpha x+\beta)$$

$$= \alpha x^3 + \beta x^2 + \alpha x^2 + \beta x + 2\alpha x + 2\beta$$

$$= \alpha x^3 + (\alpha+\beta)x^2 + (2\alpha+\beta)x + 2\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha+\beta = -1 \\ 2\alpha+\beta = 0 \\ 2\beta = a \end{cases} \Rightarrow \beta = -2 \quad \Rightarrow a = -4.$$