1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral III — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

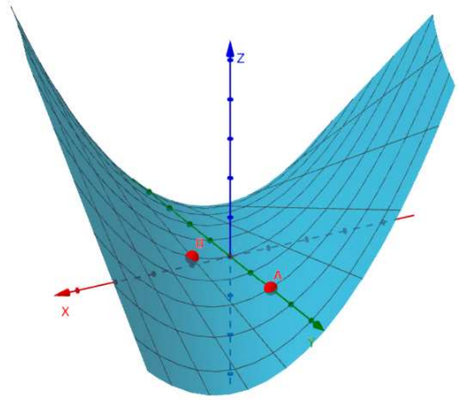
Eng. de Alimentos 08/05/2024

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Encontre o maior domínio de $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$.

2. Determine o sinal das derivadas parciais de $f(x,y) = x^2 - xy$ em:



   (a) $P = (1,0)$.

   (b) $Q = (0,1)$.

   (c) No ponto A justificando sua resposta.

   (d) No ponto B justificando sua resposta.

3. (a) Sabendo que f é diferenciável e que $f(2,5) = 6$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,5) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,5) = -1$, encontre uma aproximação para o valor de $f(2.2, 4.9)$.

   (b) Seja $z = e^r \cos\theta$, onde $r = st$ e $\theta = \sqrt{s^2+t^2}$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

4. Calcule a taxa de variação máxima de $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ em $(1,0)$ e determine a direção em que ela ocorre.

5. Encontre as dimensões de uma caixa retangular com volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas é igual a 16.

Boa Prova!

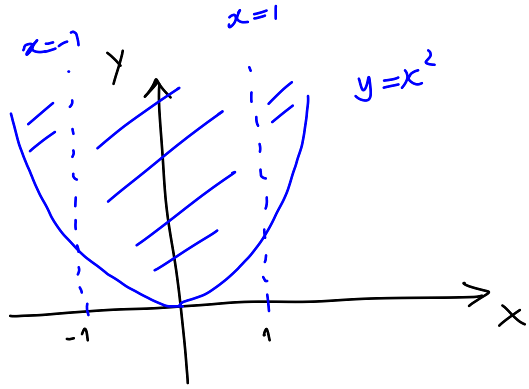
Avaliação P1

① Precisamos que:

$$y - x^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq x^2$$

e

$$1 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$$



② $f(x,y) = x^2 - xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x$$

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2 > 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -1 < 0$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -1 < 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(A) < 0$, pois a função é decrescente ao longo do plano paralelo ao plano xz no ponto A.

$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$, pois a função é constante ao longo do eixo y, ou seja, sua taxa de variação é nula.

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(B) > 0$, pois f é crescente ao longo do plano xz no ponto B.

Como $B = (x,0)$, com $x > 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(B) < 0$.

③ a) $f(2.2, 4.9)$ pode ser aproximado linearmente por

$$L(x,y) = f(2,5) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,5)\cdot(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,5)\cdot(y-5)$$

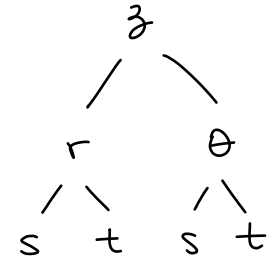
$$= 6 + 1(x-2) - (y-5) = 6 + x - 2 - y + 5$$

$$= x - y + 9$$

onde

$$f(2.2, 4.9) \approx L(2.2, 4.9) = 2.2 - 4.9 + 9 = 6.3$$

b) Pela Regra da Cadeia



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial s}$$

$$= e^r \cos\theta \, t - e^r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{1}{2\sqrt{s^2+t^2}} \cdot 2s$$

$$= e^r \cos\theta \, t - e^r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial t} = e^r \cdot \cos\theta \cdot s - e^r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{1}{2\sqrt{s^2+t^2}} \cdot 2t$$

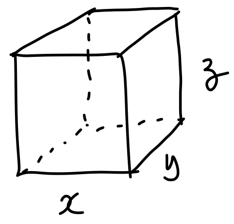
$$= e^r \cdot \cos\theta \cdot s - e^r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

④ A taxa de var. máx. é dada por $\|\nabla f(1,0)\|$ e ocorre na dir. de $\nabla f(1,0)$:

$$\nabla f = (\cos(xy)\cdot y, \cos(xy)\cdot x) \Rightarrow \nabla f(1,0) = (0,1)$$

$$\|\nabla f(1,0)\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

⑤



$x, y, z > 0$

O volume é dado por $f(x,y,z) = xyz$.

Queremos que:

$$4x + 4y + 4z = 16$$

$$\Rightarrow \underbrace{x + y + z}_{g(x,y,z)} = 4$$

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\nabla f = (yz, xz, xy) \quad , \quad \nabla g = (1,1,1)$$

$$\therefore \begin{cases} yz = \lambda & ① \\ xz = \lambda & ② \\ xy = \lambda & ③ \\ x + y + z = 16 & ④ \end{cases}$$

Note que $\lambda = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$, mas $x, y, z > 0$. Assim, $\lambda \neq 0$.

De ① e ②: $yz = xz \overset{(z>0)}{\Rightarrow} y = x$

De ② e ③: $xz = xy \overset{(x>0)}{\Rightarrow} z = y$

Substituindo em ④: $x + x + x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{3} = y = z$.