1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo de Várias Variáveis — Avaliação PS
Prof. Adriano Barbosa

Matemática 28/02/2024

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. (a) (1 pt) Determine e esboce o maior domínio de $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$.

   (b) (1 pt) Calcule o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2 + y^2}$.

2. (a) (1 pt) Calcule as derivadas parciais de $F(x,y) = \displaystyle\int_x^y \operatorname{sen}(\cos(t))\, dt$.

   (b) (1 pt) Seja $z = \operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi)$, onde $\theta = st^2$ e $\phi = s^2 t$. Use a regra da cadeia para calcular $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

3. (2 pts) Encontre a taxa de variação máxima de $f(x,y) = x^2 y + \sqrt{y}$ no ponto $(2,1)$. Em que direção ela ocorre?

4. (2 pts) Encontre os pontos de máximo e mínimo locais e pontos de sela de $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$.

5. (2 pts) Encontre os pontos da superfície $xy^2z^3 = 2$ que são mais próximos da origem.

Boa Prova!

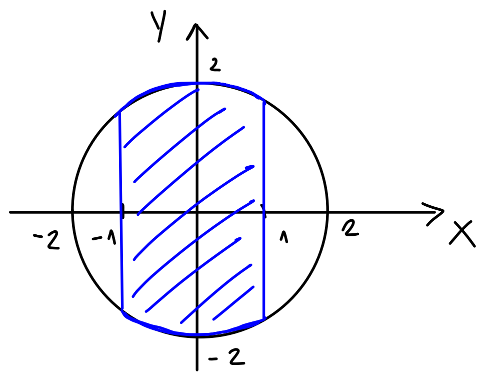
Solução

① a) Para que f esteja bem def. precisamos que

$$4-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 4 \quad \text{(disco de raio 2)}$$

e $1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$\therefore D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ e } x^2+y^2 \leq 4\}$



b) Tomando o caminho $y=x$:

$$f(x,x) = \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{3}$$

Tomando o caminho $y=-x$:

$$f(x,-x) = \frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} -\frac{1}{3}$$

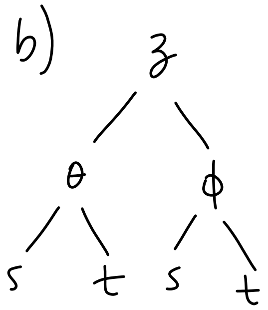
Portanto, o limite não existe.

② a) $F(x,y) = \int_x^y \operatorname{sen}(\cos t)\,dt = -\int_y^x \operatorname{sen}(\cos t)\,dt$

Pelo Teo. Fund. do Cálculo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\operatorname{sen}(\cos x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \operatorname{sen}(\cos y).$$

b)



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial s}$$

$$= \cos\theta\cos\phi\cdot t^2 - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\cdot 2st$$

e $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial t} = \cos\theta\cos\phi\cdot 2st - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\cdot s^2$

③ A taxa de variação máxima de f em $(2,1)$ é dada por $\|\nabla f(2,1)\|$ e ocorre na direção de $\nabla f(2,1)$:

$$\nabla f = \left(2xy,\ x^2 + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla f(2,1) = \left(4,\ 4+\frac{1}{2}\right) = \left(4,\ \frac{9}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \|\nabla f(2,1)\| = \sqrt{4^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{145}{4}} = \frac{\sqrt{145}}{2}.$$

4 Calculando os pontos críticos de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 2xy - y^2 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - x^2 - 2xy$$

são polinomiais, logo contínuas em $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 3y - 2xy - y^2 = 0 \\ 3x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(3-2x-y) = 0 & (1) \\ x(3-2y-x) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ $y=0$ ou $3-2x-y=0$ $\Rightarrow$ $y=0$ ou $y=-2x+3$

se $y=0$: (2) $\Rightarrow x(3-x)=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=3$

$\therefore$ $(0,0)$ e $(3,0)$ são ptos críticos de f

se $y=-2x+3$: (2) $\Rightarrow x[3-2(-2x+3)-x]=0$

$\Rightarrow x[3+4x-6-x]=0 \Rightarrow x[3x-3]=0$

$\Rightarrow x=0$ ou $x=1$

$x=0 \Rightarrow y=3$ e $x=1 \Rightarrow y=1$

$\therefore$ $(0,3)$ e $(1,1)$ são ptos críticos de f.

Aplicando o teste da 2ª derivada:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3-2x-2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3-2x-2y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x$$

$$D(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ é pto de sela.}$$

$$D(3,0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow (3,0) \text{ é pto de sela}$$

$$D(0,3) = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow (0,3) \text{ é pto de sela}$$

$$D(1,1) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -2 < 0$$

$\Rightarrow (1,1)$ é pto de máx. local.

(5) Sejam

$$f(x,y,z) = d\big((x,y,z),(0,0,0)\big)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$g(x,y,z) = xy^2z^3 - 2$$

temos

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla g = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$$

Aplicando o mét. dos mult. de Lagrange:

$$\begin{cases} 2x = \lambda y^2 z^3 \\ 2y = \lambda 2xyz^3 \\ 2z = \lambda 3xy^2z^2 \\ xy^2z^3 = 2 \end{cases}$$

Note que $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $z \neq 0$, pois $xy^2z^3 = 2$.

Além disso, $\lambda \neq 0$, pois caso contrário, $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda y^2 z^3 & (1) \\ 2 = 2\lambda x z^3 & (2) \\ 2 = 3\lambda x y^2 z & (3) \\ xy^2z^3 = 2 & (4) \end{cases}$$

De (2) e (3): $2\lambda x z^3 = 3\lambda x y^2 z \Rightarrow y^2 = \frac{2}{3} z^2$

Substituindo em (4): $x \frac{2}{3} z^2 z^3 = 2 \Rightarrow x z^5 = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{z^5}$

Substituindo em (1): $2 \cdot \frac{3}{z^5} = \lambda \frac{z^2}{3} \cdot z^3 \Rightarrow 18 = \lambda z^{10}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{18}{z^{10}}$

Substituindo em (2): $2 = \frac{18}{z^{10}} \cdot \frac{3}{z^5} \cdot z^3 \Rightarrow 2 = \frac{54}{z^{12}}$

$\Rightarrow z^{12} = 27 = 3^3 \Rightarrow z = \pm (3^3)^{1/12} \Rightarrow z \pm 3^{1/4}$

Assim,

$z = 3^{1/4} \Rightarrow x = \frac{3}{3^{5/4}} = 3^{-1/4}$ e $y^2 = \frac{2}{3}(3^{1/4})^2 = \frac{2}{3} \cdot 3^{1/2} = 2 \cdot 3^{-1/2}$

$\Rightarrow y = \pm \sqrt{2} \cdot 3^{-1/4}$

$$z = -3^{1/4} \Rightarrow x = \frac{3}{-3^{5/4}} = -3^{-1/4} \quad e \quad y^2 = \frac{2}{3}(-3^{-1/4})^2 = 2 \cdot 3^{-1/2}$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{2} \cdot 3^{-1/4}$$

Avaliando em f:

$$f(3^{-1/4}, \pm\sqrt{2}\cdot 3^{-1/4}, 3^{-1/4}) = (3^{-1/4})^2 + (\pm\sqrt{2}\cdot 3^{-1/4})^2 + (3^{-1/4})^2$$
$$= 3^{-1/2} + 2\cdot 3^{-1/2} + 3^{-1/2} = 3^{-1/2}(1+2+1) = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$f(-3^{-1/4}, \pm\sqrt{2}\cdot 3^{-1/4}, -3^{-1/4}) = (-3^{-1/4})^2 + (\pm\sqrt{2}\cdot 3^{-1/4})^2 + (-3^{-1/4})^2$$
$$= 3^{-1/2} + 2\cdot 3^{-1/2} + 3^{-1/2} = 3^{-1/2}(1+2+1) = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Além disso, $f(2,1,1) = 2^2+1^2+1^2 = 6 > \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Portanto, os pontos mais próximos do origem são

$(3^{-1/4}, \pm\sqrt{2}\cdot 3^{-1/4}, 3^{-1/4})$ e $(-3^{-1/4}, \pm\sqrt{2}\cdot 3^{-1/4}, -3^{-1/4})$.