1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo de Várias Variáveis — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

Matemática 29/11/2023

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Determine se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Prove as verdadeiras e dê um contra-exemplo para as falsas.

   (a) Se f é uma função, então $\lim\limits_{(x,y)\to(2,5)} f(x,y) = f(2,5)$.

   (b) Se $f(x,y) \to L$ quando $(x,y) \to (a,b)$ ao longo de toda reta que passa por (a,b), então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

   (c) O limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+2y^2}$ não existe.

2. Seja $z = f(x,y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$:

   (a) Encontre $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$.

   (b) Mostre que
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

3. Encontre todos os pontos cuja direção de maior variação da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é $(1,1)$.

4. Dada $f(x,y) = x^3 - 6xy + 8y^3$:

   (a) Encontre os pontos críticos de f.

   (b) Classifique os pontos críticos de f em máximo local, mínimo local ou ponto de sela.

5. Encontre os pontos do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que estão mais próximos do ponto $(-4,-2,0)$.

Boa Prova!

Avaliação P1

① a) Seja $f(x,y) = \dfrac{1}{x-2}$. Como f não está definida em pontos da forma $(2,y)$, $y \in \mathbb{R}$, então não é possível ter

$$\lim_{(x,y)\to(2,5)} f(x,y) = f(2,5).$$

b) Seja $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$. Ao longo de retas que passam pela origem, $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(x,ax) = \frac{x(ax)^2}{x^2+(ax)^4} = \frac{a^2x^3}{x^2(1+a^4x^2)} = \frac{a^2x}{1+a^4x^2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0.$$

Entretanto, ao longo da curva $x = y^2$:

$$f(y^2,y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2+y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}.$$

Portanto, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe.

c) Ao longo da curva $y = x$:

$$f(x,x) = \frac{2xx}{x^2+2x^2} = \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \frac{2}{3}$$

Ao longo do eixo x, $y=0$:

$$f(x,0) = \frac{2x\cdot 0}{x^2+2\cdot 0^2} = 0 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

Portanto, o limite não existe.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & z \arrow[dll, dash] \arrow[drr, dash] & & & \\ & x \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & & y \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ r & & \theta & & r & & \theta \end{tikzcd}$$

(2) $z = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

a) $$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-r\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot r\cos\theta$$

b) $$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\mathrm{sen}\,\theta\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot r\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot r\cos\theta\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\mathrm{sen}^2\theta$$

$$+ \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 r^2\,\mathrm{sen}^2\theta - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 r^2\cos^2\theta\right]$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\mathrm{sen}^2\theta$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\mathrm{sen}^2\theta - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2(\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

(3) A direção de maior variação de f é dada por $\nabla f = (2x-2, 2y-4)$, logo queremos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tais que $\nabla f(x,y) = k(1,1)$.

$$\begin{cases} 2x-2 = k \\ 2y-4 = k \end{cases} \Rightarrow 2x-2 = 2y-4 \Rightarrow 2y = 2x+2 \Rightarrow y = x+1.$$

④ $f(x,y) = x^3 - 6xy + 8y^3$

a) Derivando:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - 6x$$

Como as derivadas estão definidas em $\mathbb{R}^2$, os pontos críticos são as sol. do sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 & (\div 3) \\ 24y^2 - 6x = 0 & (\div 6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ 4y^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 0 & ① \\ x = 4y^2 & ② \end{cases}$$

Substituindo ② em ①:

$$(4y^2)^2 - 2y = 0 \Rightarrow 16y^4 - 2y = 0 \Rightarrow 2y(8y^3 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad 8y^3 - 1 = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad y^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{2}$$

De ②:

$$y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

Assim, os pontos críticos de f são $(0,0)$ e $(1, \frac{1}{2})$.

b) Aplicando o teste da 2ª derivada:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y$$

$$\Rightarrow D(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{vmatrix} = 288y - 36$$

Logo,

$D(0,0) = -36 < 0 \quad \Rightarrow (0,0)$ é ponto de sela de f

$D(1,\frac{1}{2}) = 288 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 36 = 108 > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,\frac{1}{2}) = 6 > 0$

$\Rightarrow (1,\frac{1}{2})$ é ponto de mín. local de f

⑤ Queremos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $d((x,y,z),(-4,-2,0))$ seja a menor possível sujeito a $z^2 = x^2 + y^2$. Aplicando o método dos Múltiplicadores de Lagrange:

$$f(x,y,z) = d((x,y,z),(-4,-2,0))^2 = (x+4)^2 + (y+2)^2 + (z-0)^2$$

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \nabla f = (2(x+4), 2(y+2), 2z) \\ \nabla g = (2x, 2y, -2z) \end{array}$$

$$\therefore \begin{cases} \cancel{2}(x+4) = \cancel{2}x\lambda \\ \cancel{2}(y+2) = \cancel{2}y\lambda \\ \cancel{2}z = -\cancel{2}z\lambda \\ x^2+y^2-z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x\lambda = -4 \\ y - y\lambda = -2 \\ z + z\lambda = 0 \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = -4 & ① \\ y(1-\lambda) = -2 & ② \\ z(1+\lambda) = 0 & ③ \\ x^2+y^2-z^2 = 0 & ④ \end{cases}$$

Observe que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, pois, caso contrário,

① $\Rightarrow 0(1-\lambda) = -4 \Rightarrow 0 = -4$

② $\Rightarrow 0(1-\lambda) = -2 \Rightarrow 0 = -2$

De ③, temos: $z=0$ ou $1+\lambda=0 \Rightarrow z=0$ ou $\lambda=-1$.

Se $z=0$, de ④, temos: $x^2+y^2=0 \Rightarrow x=0$ e $y=0$. Absurdo!

Logo, $\lambda=-1$:

① $\Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$

② $\Rightarrow 2y=-2 \Rightarrow y=-1$

Substituindo em ④:

$(-2)^2+(-1)^2-z^2=0 \Rightarrow z^2=5 \Rightarrow z=\pm\sqrt{5}$.

Dessa forma, as sol. do sistema são $(-2,-1,\pm\sqrt{5})$.