1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral I — Avaliação PS
Prof. Adriano Barbosa

Química 27/02/2024

Aluno(a):..

Todas as respostas devem ser justificadas.

Avaliação P1:

1. Determine o maior domínio de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(6x)}{x}$ e calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$.

2. Mostre que $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$.

3. Dados $f(x) = x^3 - 2x - \cos x$ e $I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

   (a) Determine se a função f é contínua no intervalo I.

   (b) Mostre que a função f possui uma raiz no intervalo I.

4. Dada a equação implícita $x^4(x+y) = y^2(3x-y)$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

5. Para quais valores de x no intervalo $[0, \pi]$ a tangente ao gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$ é horizontal?

Avaliação P2:

1. (2 pts) Calcule o limite $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$.

2. (2 pts) Um tanque cilíndrico com raio 5m está enchendo com água a uma taxa de $3\text{m}^3/\text{min}$. Quão rápido a altura da água está aumentando?

3. (2 pts) Uma sorveteria vende 130 picolés por dia por R\$ 5,00 cada. Observou-se que, durante uma promoção de verão, cada vez que diminuia R\$ 0,50 no preço do picolé, vendia 20 unidades a mais por dia. Qual deve ser o preço do picolé para que a receita da sorveteria seja máxima?

4. (2 pts) Uma partícula de move com velocidade $v(t) = \operatorname{sen}(t) - \cos(t)$. Determine a posição da partícula em função do tempo sabendo que $s(0) = 0$.

5. (2 pts) Calcule a integral definida $\displaystyle\int_0^4 \frac{4+6u}{\sqrt{u}}\, du$.

Boa Prova!

Avaliação P1

① $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(6x)}{x}$ está def. para todo $x \neq 0$ e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(6x)}{x} \cdot \frac{6}{6} = \lim_{x\to 0}\left[6 \cdot \frac{\operatorname{sen}(6x)}{6x}\right] = 6 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(6x)}{6x}$$

$$= 6 \cdot \lim_{6x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(6x)}{6x} = 6 \cdot 1 = 6,$$ pois $x \to 0 \Rightarrow 6x \to 0$.

② Temos que:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1 \overset{(\times x^2)}{\Longrightarrow} -x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2,$$ pois $x^2 \geq 0$

mas,

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Pelo Teo. do Confronto, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

③ a) $F(x) = x^3 - 2x$ é polinomial, logo é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

$G(x) = \cos x$ é trigonométrica, logo contínua em $\mathbb{R}$.

Como a soma de funções contínuas é contínua, temos que $f(x) = x^3 - 2x - \cos x$ é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, é contínua em I.

b) Observe que:

$$f(0) = 0^3 - 2\cdot 0 - \cos 0 = -1 < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 2\cdot\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{8} - \pi \approx 0{,}73 > 0$$

Pelo Teo. do valor intermediário existe $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$.

(4) $x^4(x+y) = y^2(3x-y)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[x^4(x+y)\right] = \frac{d}{dx}\left[y^2(3x-y)\right]$$

$$\Rightarrow 4x^3(x+y) + x^4\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 2y\frac{dy}{dx}(3x-y) + y^2\left(3 - \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow 4x^3(x+y) + x^4 + x^4\frac{dy}{dx} = 2y(3x-y)\frac{dy}{dx} + 3y^2 - y^2\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow x^4\frac{dy}{dx} - 2y(3x-y)\frac{dy}{dx} + y^2\frac{dy}{dx} = 3y^2 - 4x^3(x+y) - x^4$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 4x^3(x+y) - x^4}{x^4 - 2y(3x-y) + y^2} = \frac{3y^2 - 4x^4 - 4x^3y - x^4}{x^4 - 6xy + 2y^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 5x^4 - 4x^3y}{x^4 - 6xy + 3y^2}$$

(5) A tangente é horizontal quando $f'(x) = 0$. Derivando:

$$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

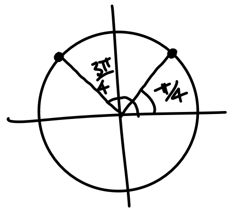
$$= 2\cos^2 x - 1$$

Assim,

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\cos x| = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \cos x \geq 0 \\ -\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \cos x < 0 \end{cases} \overset{x\in[0,\pi]}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4}, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{4}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

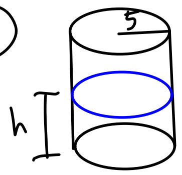


Portanto, a tangente ao gráfico de f é horizontal em $[0,\pi]$ quando $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$.

Avaliação P2

① Quando $x \to \frac{\pi}{2}^+$, temos $\cos x \to 0^-$ e $\operatorname{sen} x \to 1^+ \Rightarrow 1 - \operatorname{sen} x \to 0^+$.
Logo, o limite é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = -\infty$$

② 

O volume do cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$, onde V e h são funções do tempo. Temos que $V' = 3$ e queremos h'. Derivando

$$V' = \pi r^2 h' \Rightarrow 3 = \pi \cdot 5^2 \cdot h' \Rightarrow h' = \frac{3}{25\pi} \text{ m/min.}$$

③

#picolés	130	130+20	130+2·20	130+3·20
preço/un.	5,00	5,00−0,50	5,00−2·0,50	5,00−3·0,50
faturamento	650,00	675,00	680,00	665,00

Chamando de x o número de vezes que o desconto foi aplicado, temos que o faturamento é dado por

$$f(x) = (130 + 20x)\cdot(5 - 0{,}5x) = 650 - 65x + 100x - 10x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = -10x^2 + 35x + 650$$

Calculando os pontos críticos de f:

$f'(x) = -20x + 35$ (polinom., logo bem def. em $\mathbb{R}$)

$$\therefore -20x + 35 = 0 \Rightarrow x = \frac{35}{20} = \frac{7}{4}$$

Aplicando o teste da 2ª derivada:

$f''(x) = -20 \Rightarrow f''(\frac{7}{4}) = -20 < 0 \quad \therefore x = \frac{7}{4}$ é pto de máx. local.

Portanto, o faturamento máximo ocorre quando o desconto é aplicado $\frac{7}{4}$ vezes, ou seja, quando o desconto é de

$\frac{7}{4} \cdot 0{,}50 = \frac{7}{8} = 0{,}875$ e o preço do picolé é R\$ 4,125.

④ Sabemos que $v(t) = s'(t)$, logo queremos uma primitiva de $v(t)$.

$$s(t) = -\cos(t) - \text{sen}(t) + C$$

Como $s(0) = 0$: $\quad 0 = -\cos 0 - \text{sen}\, 0 + C \Rightarrow C = 1$.

Portanto, $s(t) = -\cos(t) - \text{sen}(t) + 1$.

⑤ $$\int_0^4 \frac{4+6u}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^4 (4+6u)\cdot u^{-1/2}\,du = \int_0^4 4u^{-1/2} + 6u^{1/2}\,du$$

$$= 4\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + 6\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^4 = 8u^{1/2} + 4u^{3/2}\Bigg|_0^4 = 8\cdot 4^{1/2} + 4\cdot 4^{3/2} - 8\cdot 0^{1/2} - 4\cdot 0^{3/2}$$

$$= 8\cdot 2 + 4\cdot 8 = 48.$$