1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Introdução ao Cálculo — Avaliação PS
Prof. Adriano Barbosa

Química 05/09/2023

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

Avaliação P1:

1. Mário e Marcos decidiram comer pizza juntos. Mário decidiu repartir a pizza e retirou $\frac{1}{4}$ da pizza para ele e deu $\frac{1}{6}$ do que restou para Marcos. Para evitar discussões sobre quem comeu mais, da segunda vez que Mário foi repartir a pizza, ele ficou com $\frac{1}{6}$ do que havia restado e deu $\frac{1}{4}$ do que ficou para Marcos, dizendo que agora eles haviam comido a mesma quantidade de pizza. Mário estava certo?

2. Uma fábrica de canetas tem um custo fixo diário de produção de R$ 120,00, mais R$ 0,40 por caneta. Cada caneta é vendida por R$ 1,20. Determine:

   (a) O custo diário de produção de 80 canetas.

   (b) O custo diário de produção de x canetas.

   (c) O lucro da empresa com a venda de 200 canetas.

3. Um experimento de agronomia mostra que a temperatura média da superfície do solo $t(x)$, em graus Celsius, é determinada em função do resíduo x de planta e biomassa na superfície, em g/m^2, conforme registrado na tabela abaixo:

$x(g/m^2)$	10	20	30	40	50
$t(x)(°C)$	$7,24$	$7,28$	$7,32$	$7,36$	$7,40$

   Qual a lei de formação da função $t(x)$?

4. Determine todos os valores reais de x para os quais $(x-2)(x-1) > 0$.

5. Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal de produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Qual é o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo?

Avaliação P2:

1. Há uma lenda que credita a invenção do xadrez a um brâmane de uma côrte indiana que, atendendo a um pedido do rei, inventou o jogo para demonstrar o valor da inteligência. O rei, encantado com o invento, ofereceu ao brâmane a escolha de uma recompensa. De acordo com essa lenda, o inventor do jogo de xadrez pediu ao rei que a recompensa fosse pega em grãos de arroz da seguinte maneira: 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente. Ou seja, a quantidade de grãos para cada casa do tabuleiro correspondia ao dobro da quantidade da casa imediatamente anterior.

   (a) De acordo com a lenda, qual é a quantidade de grãos de arroz correspondente à casa 8?

   (b) Escreve uma função f que expresse a quantidade de grãos de arroz em função do número x da casa do tabuleiro.

   (c) Escreva, na forma de potência, quantos grãos de arroz devem ser colocados na última casa do tabuleiro de xadrez.

2. Suponha que a desvalorização de um automóvel seja de 20% ao ano a partir de sua compra. Carlos comprou um automóvel pagando R$ 50.000,00. Depois de quanto tempo seu valor será de R$ 25.000,00? (Utilize $\log 2 = 0,3$)

3. (a) Seja $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$. O valor de x tal que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

   (b) Seja x um arco do terceiro quadrante. Se $\sec x = -4$, determine o valor de $\operatorname{cotg} x$. $\left(\sec x = \dfrac{1}{\cos x}, \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$

4. A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3 \left[\cos\left(\dfrac{t-2}{6}\,\pi\right) + 5\right]$ em que o tempo t é medido em meses. Determine:

   (a) O valor máximo e mínimo da população.

   (b) Em quais meses do ano a população atinge seu máximo e seu mínimo.

5. Suponha que uma revista publicou um artigo no qual era estimado que no ano $2016 + x$, com $x \in \{0, 1, 2, \cdots, 10\}$, o valor arrecadado dos impostos incidentes sobre as exportações em certo país, em milhões de dólares, poderia ser obtido pela função $f(x) = 200 + 12\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$. Caso essa previsão se confirme, relativamente ao total arrecadado a cada ano, determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

   (a) O valor máximo ocorrerá apenas em 2021.

   (b) Atingirá o valor mínimo apenas em duas ocasiões.

   (c) Poderá superar 300 milhões de dólares.

   (d) nunca será inferior a 200 milhões de dólares.

Boa Prova!

Avaliação P1

① Inicialmente é retirado $\frac{1}{4}$ para Mário restando $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ de pizza do qual foi retirado $\frac{1}{6}$ para Marcos, logo a primeira porção de Marcos é $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$ da pizza. Nesse momento, resta $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ da pizza que é novamente repartida. A nova parte de Mário é $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{48}$ da pizza e sobram $\frac{5}{8}-\frac{5}{48}=\frac{30-5}{48}=\frac{25}{48}$ da pizza. A nova parte de Marcos é então $\frac{1}{4}\cdot\frac{25}{48}=\frac{25}{192}$.

Somando as partes de cada um:

$$\text{Mário: } \frac{1}{4}+\frac{5}{48}=\frac{12+5}{48}=\frac{17}{48}\approx 0,35$$

$$\text{Marcos: } \frac{1}{8}+\frac{25}{192}=\frac{24+25}{192}=\frac{49}{192}\approx 0,25$$

Portanto, Mário comeu mais pizza que Marcos e Mário está errado.

② a) Cada caneta custa R$ 0,40, logo 80 canetas custam $80\cdot 0,4=32$. Adicionando o custo fixo diário de R$ 120, o custo de produção diário de 80 canetas é de $120+32$ $=152$.

b) O custo de produção de x canetas por dia é dado pela função $C(x) = 120 + 0{,}4x$.

c) O lucro diário ao vender 200 canetas é dado por

$$200 \cdot 1{,}2 - C(200) = 240 - 120 - 0{,}4 \cdot 200 = 40.$$

③ Note que a variação nos valores de $t(x)$ é sempre $0{,}04$ independente do intervalo que tomamos x. Logo, $t(x)$ é uma função afim, $t(x) = ax + b$. Tomando os valores de $t(10)$ e $t(20)$, temos:

$$7{,}24 = t(10) = a \cdot 10 + b \quad \Rightarrow \quad b = 7{,}24 - 10a$$

e

$$7{,}28 = t(20) = a \cdot 20 + b \quad \Rightarrow \quad 20a + 7{,}24 - 10a = 7{,}28$$

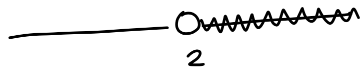
$$\Rightarrow 10a = 0{,}04 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}004.$$

e $b = 7{,}24 - 10 \cdot 0{,}004 = 7{,}20$.

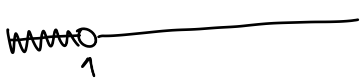
Portanto, $t(x) = 0{,}004x + 7{,}20$.

④ Para que o produto de dois números reais seja positivo é necessário que ambos sejam positivos ou ambos sejam negativos. Logo,

$x - 1 > 0$ e $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 1$ e $x > 2$



ou $x - 1 < 0$ e $x - 2 < 0 \Rightarrow x < 1$ e $x < 2$



Portanto, devemos ter $x > 2$ ou $x < 1$.

⑤ O lucro é dado por

$$L(x) = V(x) - C(x) = 3x^2 - 12x - (5x^2 - 40x - 40)$$

$$= 3x^2 - 12x - 5x^2 + 40x + 40 = -2x^2 + 28x + 40$$

$$= (-2)(x^2 - 14x - 20) = (-2)(x^2 - 2\cdot 7x - 20 + 49 - 49)$$

$$= \underbrace{(-2)\underbrace{\left[\underbrace{(x-7)^2}_{\geqslant 0} - 69\right]}_{\geqslant -69}}_{\leqslant 69\cdot 2 = 138}$$

Assim, o máximo de $L(x)$ é 138 e ocorre quando $x - 7 = 0$ $\Rightarrow x = 7$.

Avaliação P2

① a)

casa	1	2	3	4	5	6	7	8	...	x
grãos	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$	$32 = 2^5$	$64 = 2^6$	$128 = 2^7$	...	2^{x-1}

A casa 8 corresponde a 128 grãos.

b) A quantidade de grãos na casa x é 2^{x-1}.

c) A última casa é a de número 64 e o número de grãos é 2^{63}.

② Temos que:

ano	0	1	2	...	t
Valor	50.000	$50.000 - 50.000 \cdot \frac{20}{100}$ $= 50.000\left(1 - \frac{20}{100}\right)$ $= 50.000 \cdot (0{,}8)$	$50.000\,(0{,}8) - 50000\,(0{,}8) \cdot \frac{20}{100}$ $= 50000\,(0{,}8)\left(1 - \frac{20}{100}\right)$ $= 50000 \cdot (0{,}8)^2$	...	$50000 \cdot (0{,}8)^t$

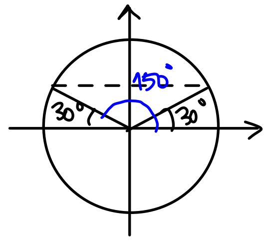
Logo, o valor do automóvel t anos após sua compra é de $V(t) = 50.000\,(0{,}8)^t$. Queremos t tal que:

$$V(t) = 25000 \Rightarrow 50000\,(0{,}8)^t = 25000 \Rightarrow (0{,}8)^t = \frac{25000}{50000} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \log\left[(0{,}8)^t\right] = \log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow t \cdot \log(0{,}8) = \overset{0}{\cancel{\log 1}} - \log 2$$

$$\Rightarrow t \cdot \log\left(\frac{8}{10}\right) = -\log 2 \Rightarrow t \cdot \left(\log 8 - \overset{1}{\cancel{\log 10}}\right) = -\log 2$$

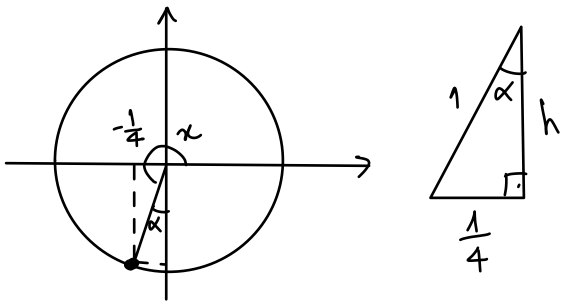
$$\Rightarrow t \cdot \left[\log(2^3) - 1\right] = -\log 2 \Rightarrow t = \frac{-\log 2}{3 \cdot \log 2 - 1} = \frac{-0{,}3}{3 \cdot 0{,}3 - 1} = 3 \text{ anos}.$$

③ a) 

$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

$90° < 150° < 180°$ e $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$.

b) Temos $\sec x = -4 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = -4 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{4}$, com $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.



Pitágoras: $1^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 1 - \frac{1}{16}$

$\Rightarrow h^2 = \frac{16-1}{16} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore \text{sen } x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

Portanto, $\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{-1/4}{-\sqrt{15}/4} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

④ a) Sabemos que

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \overset{(+5)}{\Rightarrow} 4 \leq \cos\alpha + 5 \leq 6$$

$$\overset{(\times 10^3)}{\Rightarrow} 4 \cdot 10^3 \leq 10^3(\cos\alpha + 5) \leq 6 \cdot 10^3, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Assim, o valor máx. da pop. é 6000 e o mín. é 4.000.

b) O máximo ocorre quando α é múltiplo par de π e o mínimo quando α é múltiplo ímpar de π. Logo, como $t \in \{1, 2, \ldots, 12\}$

máx.: $\frac{t-2}{6}\cancel{\pi} = 2k\cancel{\pi} \Rightarrow t - 2 = 12k \Rightarrow t = 12k + 2 \Rightarrow t = 2 \ (k=0)$

mín.: $\frac{t-2}{6}\cancel{\pi} = (2k+1)\cancel{\pi} \Rightarrow t - 2 = 6(2k+1) \Rightarrow t = 12k + 6 + 2 = 12k + 8$

$\Rightarrow t = 8 \ (k=0)$

(5) a) Sabemos que

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \overset{(\times 12)}{\Rightarrow} -12 \leq 12\cos\alpha \leq 12 \overset{(+200)}{\Rightarrow} 188 \leq 200 + 12\cos\alpha \leq 212, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Logo, o máximo da arrecadação será 212 milhões e o mínimo será 188 milhões.

O mínimo ocorre em múltiplos ímpares de π enquanto que o máximo ocorre em múltiplos pares de π. Assim, para $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$

$$\text{máx.: } \frac{\pi}{3}x = 2k\pi \Rightarrow x = 6k \Rightarrow x = \begin{cases} 0, & k = 0 \Rightarrow \text{ano} = 2016 \\ 6, & k = 1 \Rightarrow \text{ano} = 2022 \end{cases}$$

$$\text{mín.: } \frac{\pi}{3}x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = 6k+3 \Rightarrow x = \begin{cases} 3, & k = 0 \Rightarrow \text{ano} = 2019 \\ 9, & k = 1 \Rightarrow \text{ano} = 2025 \end{cases}$$

Portanto,

a) F b) V c) F d) F