1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo de Várias Variáveis — Avaliação P2
Prof. Adriano Barbosa

Matemática 30/08/2023

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Determine o volume do sólido definido abaixo da superfície $f(x, y) = y^3 e^{2x}$ e acima do retângulo $R = [0, 2] \times [0, 4]$.

2. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1}\, dy\, dx$ invertendo a ordem de integração.

3. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} x - y\, dx\, dy$.

4. Calcule a integral $\displaystyle\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$, onde E é a região que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e entre os planos $z = -1$ e $z = 3$.

5. Descreva o sólido cujo volume é dado pela integral $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$ e calcule seu volume.

Boa Prova!

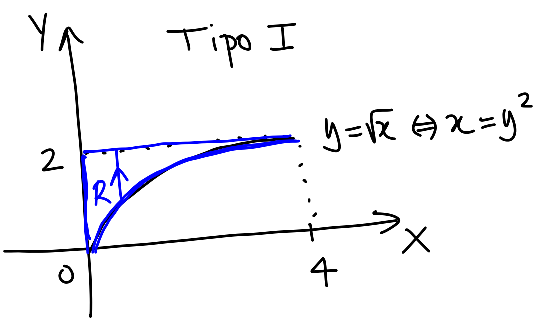
Avaliação P2

① Como $y \in [0,4]$, então $y^3 \geq 0$. Além disso, $e^{2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Logo, $f(x,y) = y^3 \cdot e^{2x} \geq 0$ em R e o volume do sólido é igual ao valor da integral

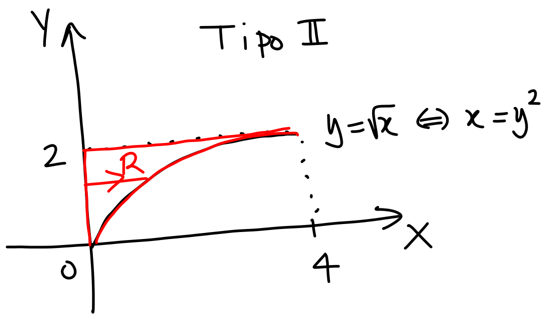
$$\iint_R y^3 \cdot e^{2x}\, dA = \int_0^2 \int_0^4 y^3 \cdot e^{2x}\, dy\, dx = \int_0^2 e^{2x} dx \cdot \int_0^4 y^3 dy$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^2 \cdot \frac{y^4}{4}\Big|_0^4 = \left(\frac{e^4}{2} - \frac{e^0}{2}\right)\left(\frac{256}{4} - \frac{0}{4}\right) = \left(\frac{e^4 - 1}{2}\right) \cdot 64 = 32(e^4 - 1)$$

② Descrevendo a região de integração como Tipo II:



$R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4,\ \sqrt{x} \leq y \leq 2\}$



$R = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq y^2\}$

Logo

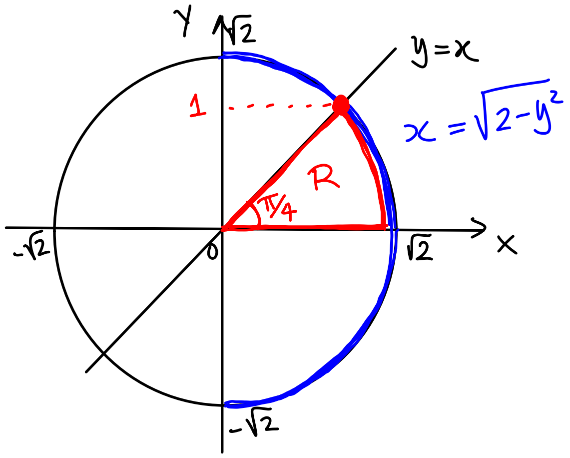
$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{1}{y^3+1}\, dx\, dy = \int_0^2 \frac{1}{y^3+1}\left(\int_0^{y^2} dx\right) dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{y^3+1}\left(x\Big|_0^{y^2}\right) dy = \int_0^2 \frac{y^2}{y^3+1}\, dy = \int_1^9 \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{3}\, du = \frac{1}{3}\int_1^9 \frac{1}{u}\, du$$

$$\left(\begin{array}{l} u = y^3+1 \Rightarrow du = 3y^2 dy \\ y=0 \Rightarrow u=1 \text{ e } y=2 \Rightarrow u=9 \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln u\Big|_1^9\right) = \frac{1}{3}(\ln 9 - \ln 1) = \frac{\ln 9}{3}.$$

③ $R = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ y \le x \le \sqrt{2-y^2}\}$



$x = \sqrt{2-y^2} \Rightarrow x^2 = 2-y^2$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 2$ (circ. raio $\sqrt{2}$)

Interseção:

$y = \sqrt{2-y^2} \Rightarrow y^2 = 2-y^2 \Rightarrow 2y^2 = 2$

$\Rightarrow y = \pm 1$

Em coord. polares, $R = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le \sqrt{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}$. Logo,

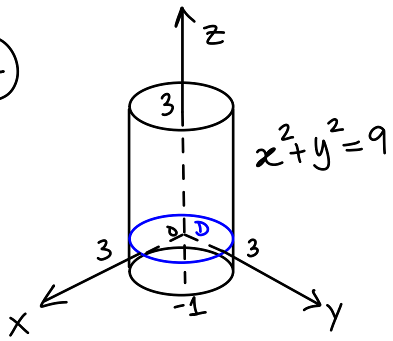
$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{2-y^2}} x-y\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} (r\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, d\theta\, dr$$

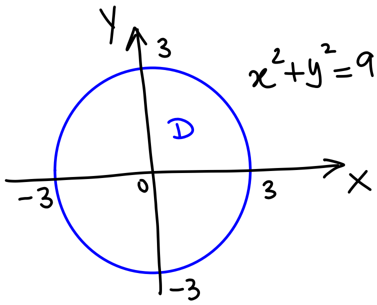
$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} r^2 (\cos\theta - \text{sen}\,\theta)\, d\theta\, dr = \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr \cdot \int_0^{\pi/4} \cos\theta - \text{sen}\,\theta\, d\theta$$

$$= \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\text{sen}\,\theta + \cos\theta \Big|_0^{\pi/4} \right) = \left[\frac{(\sqrt{2})^3}{3} - 0 \right] \cdot \left(\text{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \text{sen}\,0 - \cos 0 \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\sqrt{2} - 1) = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}.$$

④





$E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ -1 \le z \le 3\}$

$D = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

$$\Rightarrow E = \{(r,\theta,z) \mid 0 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -1 \le z \le 3\}$$

$$\therefore \iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\, dV = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^3 \sqrt{r^2} \cdot r\, dz\, d\theta\, dr$$

$$\int_0^3\int_0^{2\pi}\int_{-1}^3 \sqrt{r^2}\cdot r\,dz\,d\theta\,dr = \int_0^3\int_0^{2\pi}\int_{-1}^3 r^2\,dz\,d\theta\,dr$$

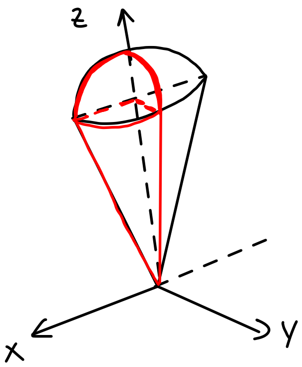
$$= \int_0^3 r^2\,dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{-1}^3 dz = \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^3\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot\left(z\Big|_{-1}^3\right) = \frac{27}{3}\cdot 2\pi\cdot(3+1)$$

$$= 72\pi$$

(5) A região de integração é

$$E = \{(\rho,\theta,\phi) \mid 0\leq\rho\leq 3,\ 0\leq\theta\leq\tfrac{\pi}{2},\ 0\leq\phi\leq\tfrac{\pi}{6}\},$$

~~a metade~~ localizado no primeiro octante ~~semi-espaço $y\geq 0$~~ da região cônica da esfera de raio 3 de faz ângulo $\frac{\pi}{6}$ com o semi-eixo z positivo e vértice na origem. (um quarto do sorvete)



Como o integrando é $f(x,y,z)=1$, o valor da integral é igual ao volume do sólido E.

Calculando a integral:

$$\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi = \int_0^{\pi/6}\sin\phi\,d\phi\cdot\int_0^{\pi/2} d\theta\cdot\int_0^3 \rho^2\,d\rho$$

$$= \left(-\cos\phi\Big|_0^{\pi/6}\right)\cdot\left(\theta\Big|_0^{\pi/2}\right)\cdot\left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^3\right) = \left(-\cos\frac{\pi}{6}+\cos 0\right)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 9$$

$$= \frac{9\pi}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9\pi}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)$$