| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| Nota | |

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS**
**Cálculo de Várias Variáveis — Avaliação P1**
**Prof. Adriano Barbosa**

Matemática 12/07/2023

**Aluno(a):**.......................................................................................

**Todas as respostas devem ser justificadas.**

1. Esboce o maior domínio das funções abaixo ou descreva-os com suas palavras.

   (a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

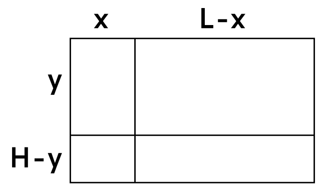
   (b) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

2. Seja $f$ é diferenciável com $f(2, 5) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 5) = -1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 5) = 1$, utilize a aproximação linear de $f$ em $(2, 5)$ para estimar o valor de $f(2.1, 4.9)$.

3. Seja $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,(\theta)$. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$.

4. Determine a taxa de variação máxima de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ em $(0, 0)$ e a direção em que ela ocorre.

5. Um retângulo de largura $L$ e altura $H$ é cortado em quatro retângulos menores por duas linhas perpendiculares entre si e paralelas a seus lados. Encontre o valor mínimo para a soma dos quadrados das áreas dos retângulos menores. (Dica: simplifique $f$ antes de calcular as derivadas.)



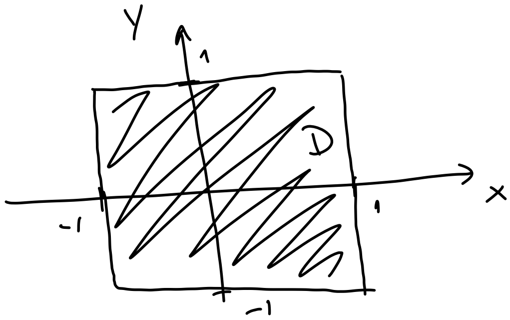

*Boa Prova!*

# Avaliação P1

① a) f está bem def. se

$$1-x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff |x| \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1$$

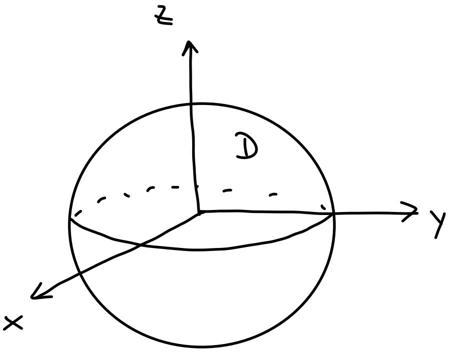
e $$1-y^2 \geq 0 \iff y^2 \leq 1 \iff |y| \leq 1 \iff -1 \leq y \leq 1$$




O domínio de f é a região $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

b) f está bem def. se

$$1-x^2-y^2-z^2 \geq 0 \iff x^2+y^2+z^2 \leq 1.$$




Assim, seu domínio é esfera de raio 1 e centro na origem e seu interior.

② A aproximação linear de f em (2,5) é dada por

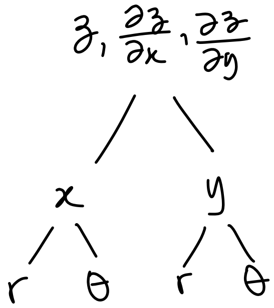
$$L(x,y) = f(2,5) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,5)\cdot(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,5)\cdot(y-5)$$

$$= 3 - (x-2) + (y-5) = -x+y$$

Portanto,

$$f(2.1, 4.9) \approx L(2.1, 4.9) = -2.1 + 4.9 = 2.8$$

③ Pela regra da cadeia:




$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (-r \,\text{sen}\,\theta) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot (r \cos\theta)$$

$$= r\left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\theta - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \text{sen}\,\theta\right)$$

(produto)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial (r)}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\theta - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \text{sen}\,\theta\right) + r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\theta - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \text{sen}\,\theta\right)$$

(cadeia)

$$= \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\theta - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \text{sen}\,\theta + r\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}\right) \cdot \cos\theta - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}\right) \cdot \text{sen}\,\theta\right]$$

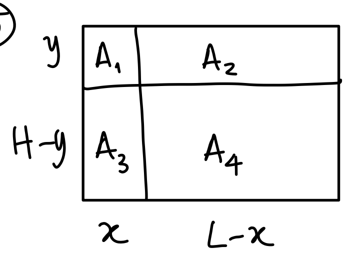
$$= \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\theta - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \text{sen}\,\theta + r\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \cos^2\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \text{sen}\,\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \cos\theta\,\text{sen}\,\theta - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cdot \text{sen}^2\theta\right]$$

④ $\nabla f = (2x-2, 2y-4) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (-2,-4)$ é a direção de maior variação de $f$ em $(0,0)$.

O valor da taxa de variação máxima é

$$\|\nabla f(0,0)\| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

⑤




$A_1 = xy$ $\qquad$ $A_3 = (H-y)x$

$A_2 = (L-x)y$ $\qquad$ $A_4 = (H-y)(L-x)$

Queremos o mínimo de

$$f(x,y) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^3 + A_4^2 = x^2y^2 + (L-x)^2y^2 + (H-y)^2x^2 + (H-y)^2(L-x)^2$$

$$= x^2\left[y^2 + (H-y)^2\right] + (L-x)^2\left[y^2 + (H-y)^2\right]$$

$$= \left[x^2 + (L-x)^2\right]\cdot\left[y^2 + (H-y)^2\right].$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[2x - 2(L-x)\right]\left[y^2 + (H-y)^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2(L-x) = 0 \quad \text{ou} \quad y^2 + (H-y)^2 = 0$$

- $\cancel{2}x - \cancel{2}(L-x) = 0 \Rightarrow x - L + x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{L}{2}}$
- $y^2 + (H-y)^2 = 0 \Rightarrow y^2 + H^2 - 2Hy + y^2 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 2Hy + H^2 = 0$

$\Delta = (-2H)^2 - 4\cdot 2\cdot H^2 = 4H^2 - 8H^2 = -4H^2 < 0 \quad \therefore$ não existe raiz real.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left[x^2 + (L-x)^2\right]\left[2y - 2(H-y)\right] = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (L-x)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad 2y - 2(H-y) = 0$$

- $\cancel{2}y - \cancel{2}(H-y) = 0 \Rightarrow y - H + y = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{H}{2}}$
- $x^2 + (L-x)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + L^2 - 2Lx + x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2Lx + L^2 = 0$

$\Delta = (-2L)^2 - 4\cdot 2\cdot L^2 = 4L^2 - 8L^2 = -4L^2 < 0$, não existe raiz real.

Assim, o único ponto crítico de $f$ é $P=\left(\frac{L}{2},\frac{H}{2}\right)$.

Aplicando o teste da 2ª derivada:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = [2+2]\cdot\left[y^2+(H-y)^2\right] = 4\left[y^2+(H-y)^2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = 4\left[\frac{H^2}{4}+\left(H-\frac{H}{2}\right)^2\right] = 4\left[\frac{H^2}{4}+\frac{H^2}{4}\right] = 2H^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = [2x-2(L-x)]\cdot[2y-2(H-y)]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) = \left[2\cdot\frac{L}{2}-2\left(L-\frac{L}{2}\right)\right]\left[2\cdot\frac{H}{2}-2\left(H-\frac{H}{2}\right)\right] = [L-L][H-H] = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left[x^2+(L-x)^2\right]\cdot[2+2] = 4\left[x^2+(L-x)^2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) = 4\left[\frac{L^2}{4}+\left(L-\frac{L}{2}\right)^2\right] = 4\left[\frac{L^2}{4}+\frac{L^2}{4}\right] = 2L^2$$

$$\therefore D(P) = \begin{vmatrix} 2H^2 & 0 \\ 0 & 2L^2 \end{vmatrix} = 4H^2L^2 > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = 2H^2 > 0$$

Portanto, $P$ é ponto de mínimo local de $f$.