1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral II — Avaliação PS
Prof. Adriano Barbosa

Química 05/09/2023

Aluno(a):..

Todas as respostas devem ser justificadas.

Avaliação P1:

1. Calcule a integral indefinida $\int x^{1/2} \cos\left(1 + x^{3/2}\right)\, dx$.

2. Calcule a integral $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$.

3. Determine o valor da integral definida $\int_1^2 x \ln x\, dx$.

4. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Reescreva a soma de frações parciais correta para as falsas. Não é necessário calcular as constantes A, B e C.

   (a) $\frac{x(x^2+9)}{x^2-9}$ pode ser escrita como soma de frações parciais da forma $\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$.

   (b) $\frac{x^2+9}{x(x^2-9)}$ pode ser escrita como soma de frações parciais da forma $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-3}$.

   (c) $\frac{x^2+9}{x^2(x-9)}$ pode ser escrita como soma de frações parciais da forma $\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x-9}$.

   (d) $\frac{x^2-9}{x(x^2+9)}$ pode ser escrita como soma de frações parciais da forma $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2+9}$.

5. Determine se a integral imprópria $\int_1^\infty e^{-3x}\, dx$ é convergente ou divergente e calcule seu valor se for convergente.

Avaliação P2:

1. Use a mudança de variáveis $u = y/x$ para resolver a EDO $xy' = y + xe^{y/x}$.

2. Resolva a equação diferencial $y' + y = \cos(e^x)$.

3. Resolva o problema de valor inicial $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$.

4. Determine se a série $-3 + 4 - \frac{16}{3} + \frac{64}{9} + \ldots$ é convergente e calcule sua soma, se possível.

5. Encontre a série de Maclaurin de $f(x) = \cos(x)$ e determine seu intervalo de convergência.

Boa Prova!

Solução P1

① Chame $u = 1 + x^{3/2}$, logo $du = \frac{3}{2} x^{1/2} dx \Rightarrow x^{1/2} dx = \frac{2}{3} du$. Assim,

$$\int x^{1/2} \cos(1 + x^{3/2})\, dx = \int \cos(1 + x^{3/2}) \cdot x^{1/2} dx = \int \cos(u) \cdot \frac{2}{3} du$$

$$= \frac{2}{3} \int \cos(u)\, du = \frac{2}{3} \operatorname{sen}(u) + C = \frac{2}{3} \operatorname{sen}(1 + x^{3/2}) + C.$$

② Observe que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ não está definido em $x = 1$, logo a integral é imprópria.

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{t \to 1^-} \int_t^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

Calculando a primitiva: $u = x - 1 \Rightarrow du = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int u^{-1/2} du = 2 u^{1/2} + C = 2(x-1)^{1/2} + C.$$

Assim,

$$\lim_{t \to 1^-} \int_t^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{t \to 1^-} \left[2(x-1)^{1/2} \Big|_t^3 \right] = \lim_{t \to 1^-} 2 \left[2^{1/2} - (t-1)^{1/2} \right] = 2\sqrt{2}$$

Portanto, $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = 2\sqrt{2}$

③ Integrando por partes:

$$u = \ln x \qquad\qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$
$$\Rightarrow$$
$$dv = x\,dx \qquad\qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \int_1^2 x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{4}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^2\right) = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

④ a) $x(x^2+9) = x^3+9x$ tem grau 3 e x^2-9 tem grau 2, logo é necessário efetuar a divisão:

$$\begin{array}{rl} x^3 + 9x & \underline{|\,x^2-9\,} \\ \underline{-x^3 + 9x} & \quad x \\ 18x & \end{array}$$

$$x(x^2+9) = x(x^2-9) + 18x$$

$$\Rightarrow \frac{x(x^2+9)}{x^2-9} = x + \frac{18x}{x^2-9}$$

Como $x^2-9 = (x-3)(x+3)$, temos:

$$\frac{x(x^2+9)}{x^2-9} = x + \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

b) $x(x^2-9) = x(x-3)(x+3)$

$$\Rightarrow \frac{x^2+9}{x(x^2-9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+3}, \qquad A, B, C \in \mathbb{R}$$

c) Como $x=0$ é uma raiz de $x^2(x-9)=0$ com multiplicidade, temos:

$$\frac{x^2+9}{x^2(x-9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-9}, \quad A,B,C \in \mathbb{R}.$$

d) Como $x^2+9=0$ não tem raízes reais:

$$\frac{x^2-9}{x(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+9}, \quad A,B,C \in \mathbb{R}.$$

5) Calculando a integral indefinida: $u=-3x \Rightarrow du=-3dx$
$\Rightarrow dx = -\frac{1}{3}du$

$$\int e^{-3x}dx = \int e^{u}\left(-\frac{1}{3}\right)du = -\frac{1}{3}\int e^{u}du = -\frac{1}{3}e^{u}+C = -\frac{1}{3}e^{-3x}+C$$

Assim,

$$\int_1^{\infty} e^{-3x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t e^{-3x}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_1^t\right) = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{3}\left(e^{-3t}-e^{-3}\right) = \frac{1}{3e^3}$$

Portanto, a integral converge e seu valor é $\frac{1}{3e^3}$

Avaliação P2

① Tomando $u = \frac{y}{x}$, temos $y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$. Logo,

$$xy' = y + xe^{y/x} \Rightarrow x(u + xu') = xu + xe^{u}$$

$$\Rightarrow \cancel{xu} + x^2u' = \cancel{xu} + xe^{y/x} \Rightarrow x^2u' = xe^{u} \Rightarrow e^{-u} \cdot u' = \frac{1}{x} \text{ (separável)}$$

$$\Rightarrow \int e^{-u}du = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow -e^{-u} = \ln|x| + c \Rightarrow e^{-u} = -\ln|x| - c$$

$$\Rightarrow -u = \ln(-\ln|x| - c) \Rightarrow u = -\ln(-\ln|x| - c)$$

Portanto,

$$y = xu = -x\ln(-\ln|x| - c).$$

② $y' + y = \cos(e^x)$ (linear de 1ª ordem)

Fator integrante: $e^{\int 1dx} = e^x$

$$\therefore e^x(y' + y) = e^x\cos(e^x) \Rightarrow e^xy' + e^xy = e^x\cos(e^x)$$

$$\Rightarrow (e^xy)' = e^x\cos(e^x) \Rightarrow \int (e^xy)'dx = \int e^x\cos(e^x)dx$$

$(u = e^x \Rightarrow du = e^xdx)$

$$\Rightarrow e^xy + c_1 = \int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + c_2 = \operatorname{sen}(e^x) + c_2$$

$$\Rightarrow e^xy = \operatorname{sen}(e^x) + c \Rightarrow y = e^{-x}[c + \operatorname{sen}(e^x)].$$

③ $y'' - 3y' + 2y = 0$ (linear 2ª ordem coef. cte homog.)

Eq. característica: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 2$ ou $r = 1$.

Logo, a solução geral da EDO é $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$.

Resolvendo o PVI:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} \Rightarrow y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$$

$$\therefore \begin{cases} 2 = y(0) = C_1 + C_2 & \Rightarrow C_2 = 2 - C_1 \quad (\mathrm{I}) \\ 1 = y'(0) = 2C_1 + C_2 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II):

$$2C_1 + (2 - C_1) = 1 \Rightarrow C_1 = -1$$

Substituindo em (I):

$$C_2 = 2 - (-1) \Rightarrow C_2 = 3$$

Portanto, a solução do PVI é $y = -e^{2x} + 3e^{x}$.

④ Observe que:

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{4}{3}, \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{-16/3}{4} = -\frac{4}{3}, \quad \frac{x_4}{x_3} = \frac{64/9}{-16/3} = -\frac{4}{3}$$

Logo, a série é geométrica com $r = -\frac{4}{3}$. Como $r < -1$, a série é divergente.

5 Derivando:

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'''(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$$

Logo,

$$\cos x = 1 + \cancel{0x} - \frac{1}{2!}x^2 + \cancel{\frac{0}{3!}x^3} + \frac{1}{4!}x^4 + \cancel{\frac{0}{5!}x^5} - \frac{1}{6!}x^6 + \cancel{\frac{0}{7!}x^7} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Aplicando o teste da razão:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{(-1)^n x^{2n}}\right| = \left|(-1) \cdot x^2 \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}\right|$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Portanto, a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$.