1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral II — Avaliação P2
Prof. Adriano Barbosa

Química 29/08/2023

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Use a mudança de variáveis $u = y/x$ para resolver a EDO $xy' = y + xe^{y/x}$.

2. Resolva a equação diferencial $y' + y = \operatorname{sen}(e^x)$.

3. Resolva o problema de valor inicial $y'' - 6y' + 8y = 0$, $y(0) = 2$ e $y'(0) = 2$.

4. Determine se a série $4 + 3 + \frac{9}{4} + \frac{27}{16} + \ldots$ é convergente e calcule sua soma, se possível.

5. Encontre a série de Maclaurin de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e determine seu intervalo de convergência.

Boa Prova!

Avaliação P2

① Tomando $u = \frac{y}{x}$, temos $y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$. Logo,

$$xy' = y + xe^{y/x} \Rightarrow x(u + xu') = xu + xe^{u}$$

$$\Rightarrow \cancel{xu} + x^2u' = \cancel{xu} + xe^{y/x} \Rightarrow x^2u' = xe^{u} \Rightarrow e^{-u} \cdot u' = \frac{1}{x} \quad \text{(separável)}$$

$$\Rightarrow \int e^{-u} du = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow -e^{-u} = \ln|x| + c \Rightarrow e^{-u} = -\ln|x| - c$$

$$\Rightarrow -u = \ln(-\ln|x| - c) \Rightarrow u = -\ln(-\ln|x| - c)$$

Portanto,

$$y = xu = -x\ln(-\ln|x| - c).$$

② $y' + y = \text{sen}(e^x)$ (linear de 1ª ordem)

Fator integrante: $e^{\int 1 dx} = e^x$

$$\therefore e^x(y' + y) = e^x \,\text{sen}(e^x) \Rightarrow e^x y' + e^x y = e^x \,\text{sen}(e^x)$$

$$\Rightarrow (e^x y)' = e^x \,\text{sen}(e^x) \Rightarrow \int (e^x y)' dx = \int e^x \,\text{sen}(e^x) dx$$

$(u = e^x \Rightarrow du = e^x dx)$

$$\Rightarrow e^x y + c_1 = \int \text{sen}\, u \, du = -\cos u + c_2 = -\cos(e^x) + c_2$$

$$\Rightarrow e^x y = -\cos(e^x) + c \Rightarrow y = e^{-x}[c - \cos(e^x)].$$

③ $y'' - 6y' + 8y = 0$ (linear 2ª ordem coef. cte homog.)

Eq. característica: $r^2 - 6r + 8 = 0 \Rightarrow r = 2$ ou $r = 4$.

Logo, a solução geral da EDO é $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}$.

Resolvendo o PVI:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} \Rightarrow y' = 2c_1 e^{2x} + 4c_2 e^{4x}$$

$$\therefore \begin{cases} 2 = y(0) = c_1 + c_2 & \Rightarrow c_2 = 2 - c_1 \quad (\mathrm{I}) \\ 2 = y'(0) = 2c_1 + 4c_2 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II):

$$2c_1 + 4(2 - c_1) = 2 \Rightarrow 2c_1 + 8 - 4c_1 = 2 \Rightarrow -2c_1 = -6 \Rightarrow c_1 = 3.$$

Substituindo em (I):

$$c_2 = 2 - 3 \Rightarrow c_2 = -1.$$

Portanto, a solução do PVI é $y = 3e^{2x} - e^{4x}$.

④ Observe que:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{3}{4}, \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{9/4}{3} = \frac{3}{4}, \quad \frac{x_4}{x_3} = \frac{27/16}{9/4} = \frac{3}{4}$$

Logo, a série é geométrica com $r = \frac{3}{4}$. Como $|r| < 1$, a série é convergente e sua soma é

$$\frac{a}{1-r} = \frac{4}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{\frac{4-3}{4}} = 16.$$

(5) Derivando:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x = f(x)$$

Logo,

$$\operatorname{sen} x = \cancel{0} + 1x + \cancel{\frac{0}{2!}} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \cancel{\frac{0}{4!}} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \cancel{\frac{0}{6!}} x^6 - \frac{1}{7!} x^7 + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Aplicando o teste da razão:

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{[2(n+1)+1]!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}} \right| = \left| (-1) \cdot x^2 \cdot \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \right|$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Portanto, a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$.