UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral II — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

Química 04/07/2023

1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Calcule a integral indefinida $\int \sqrt{x}\, \text{sen}\,(1 + x^{3/2})\; dx$.

2. Calcule a integral $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\; dx$.

3. Determine o valor da integral definida $\int_1^5 x^2 \ln x\; dx$.

4. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Reescreva a soma de frações parciais correta para as falsas. Não é necessário calcular as constantes A, B e C.

   (a) $\frac{x(x^2+4)}{x^2-4}$ pode ser escrita como soma de frações parciais da forma $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$.

   (b) $\frac{x^2+4}{x(x^2-4)}$ pode ser escrita como soma de frações parciais da forma $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$.

   (c) $\frac{x^2+4}{x^2(x-4)}$ pode ser escrita como soma de frações parciais da forma $\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x-4}$.

   (d) $\frac{x^2-4}{x(x^2+4)}$ pode ser escrita como soma de frações parciais da forma $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2+4}$.

5. Determine se a integral imprópria $\int_2^{\infty} e^{-5p}\; dp$ é convergente ou divergente e calcule seu valor se for convergente.

Boa Prova!

Solução P1

① Chame $u = 1 + x^{3/2}$, logo $du = \frac{3}{2} x^{1/2} dx \Rightarrow x^{1/2} dx = \frac{2}{3} du$. Assim,

$$\int \sqrt{x}\, \operatorname{sen}(1+x^{3/2})\, dx = \int \operatorname{sen}(1+x^{3/2}) \cdot x^{1/2} dx = \int \operatorname{sen}(u) \cdot \frac{2}{3} du$$

$$= \frac{2}{3} \int \operatorname{sen}(u)\, du = -\frac{2}{3}\cos(u) + C = -\frac{2}{3}\cos(1+x^{3/2}) + C.$$

② Observe que $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ não está definido em $x=1$, logo a integral é imprópria.

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx + \int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \lim_{t \to 1^+} \int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx + \lim_{t \to 1^-} \int_t^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$$

Calculando a primitiva: $u = x-1 \Rightarrow du = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{u}} du = \int u^{-1/3} du = \frac{3}{2} u^{2/3} + C = \frac{3}{2}(x-1)^{2/3} + C.$$

Assim,

$$\lim_{t \to 1^+} \int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \lim_{t \to 1^+} \left[\frac{3}{2}(x-1)^{2/3} \Big|_0^t \right] = \lim_{t \to 1^+} \frac{3}{2}\left[(t-1)^{2/3} - (-1)^{2/3} \right] = -\frac{3}{2}$$

e

$$\lim_{t \to 1^-} \int_t^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \lim_{t \to 1^-} \left[\frac{3}{2}(x-1)^{2/3} \Big|_t^9 \right] = \lim_{t \to 1^-} \frac{3}{2}\left[8^{2/3} - (t-1)^{2/3} \right] = 6$$

Portanto, $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}$

③ Integrando por partes:

$$u = \ln x \qquad\qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$
$$\Rightarrow$$
$$dv = x^2 dx \qquad\qquad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\therefore \int_1^5 x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x \Big|_1^5 - \int_1^5 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{125}{3}\ln 5 - \frac{1}{3}\int_1^5 x^2 dx$$

$$= \frac{125}{3}\ln 5 - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_1^5\right) = \frac{125}{3}\ln 5 - \frac{125}{9} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{125}{3}\ln 5 - \frac{124}{9}.$$

④ a) $x(x^2+4) = x^3+4x$ tem grau 3 e x^2-4 tem grau 2, logo é necessário efetuar a divisão:

$$\begin{array}{l|l} x^3+4x & x^2-4 \\ \hline -x^3+4x & x \\ \hline \quad 8x & \end{array}$$

$$x(x^2+4) = x(x^2-4)+8x$$

$$\Rightarrow \frac{x(x^2+4)}{x^2-4} = x + \frac{8x}{x^2-4}$$

Como $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, temos:

$$\frac{x(x^2+4)}{x^2-4} = x + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

b) $x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$

$$\Rightarrow \frac{x^2+4}{x(x^2-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}, \qquad A, B, C \in \mathbb{R}$$

c) Como $x=0$ é uma raiz de $x^2(x-4)=0$ com multiplicidade, temos:

$$\frac{x^2+4}{x^2(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-4}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

d) Como $x^2+4=0$ não tem raízes reais:

$$\frac{x^2-4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

⑤ Calculando a integral indefinida: $u=-5p \Rightarrow du=-5\,dp$
$\Rightarrow dp = -\frac{1}{5}du$

$$\int e^{-5p}\,dp = \int e^{u}\left(-\frac{1}{5}\right)du = -\frac{1}{5}\int e^{u}\,du = -\frac{1}{5}e^{u}+C = -\frac{1}{5}e^{-5p}+C$$

Assim,

$$\int_2^{\infty} e^{-5p}\,dp = \lim_{t\to+\infty}\int_2^{t} e^{-5p}\,dp = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{5}e^{-5p}\Big|_2^{t}\right) = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{5}\left(e^{-5t}-e^{-10}\right) = \frac{1}{5e^{10}}.$$

Portanto, a integral converge e seu valor é $\frac{1}{5e^{10}}$