1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo de Várias Variáveis — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

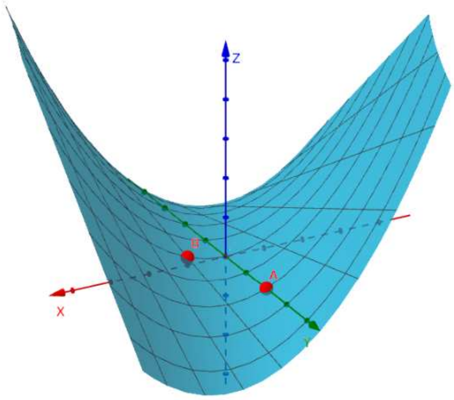
Matemática 13/02/2023

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Determine e esboce o domínio de $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$.

2. Determine o sinal das derivadas parciais de $f(x, y) = x^2 - xy$ em:



   (a) $P = (1, 0)$.

   (b) $Q = (0, 1)$.

   (c) No ponto A justificando sua resposta.

   (d) No ponto B justificando sua resposta.

3. Se $z = f(x - y)$, mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. A temperatura T de um ponto P numa bola de metal é inversamente proporcional à distância de P ao centro da bola, que tomamos como sendo a origem. A temperatura no ponto $(1, 2, 2)$ é de 120°C. Determine a taxa de variação de T em $(1, 2, 2)$ na direção $(1, -1, 1)$.

5. Determine os máximos e mínimos de $f(x, y, z) = 2x + 2y + z$ restrita a $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

6. (Bônus) Uma função f é chamada homogênea de n-ésimo grau se satisfaz a equação $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo t, onde n é um inteiro positivo e f tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

   (a) Verifique se $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ é homogênea de grau 3.

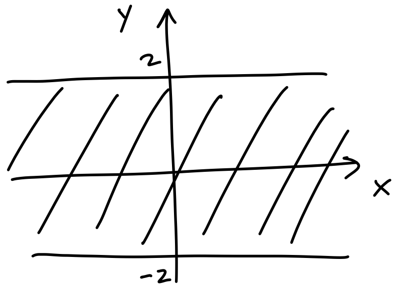
   (b) Mostre que, se f é homogênea de grau n, então
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$
   [Dica: utilize a regra da cadeia para derivar $f(tx, ty)$ com relação a t.]

Boa Prova!

Solução P1

① $F(x,y) = 1+\sqrt{4-y^2}$ está definida para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$4-y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 4 \Rightarrow |y| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2.$



② $f(x,y) = x^2 - xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x$$

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -1$

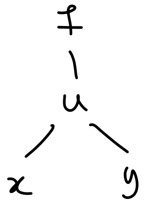
b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(A) < 0$, pois a função é decrescente ao longo do plano paralelo ao plano XZ no ponto A.

$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$, pois a função é constante ao longo do eixo y, ou seja, sua taxa de variação é nula.

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(B) > 0$, pois f é crescente ao longo do plano XZ no ponto B.

Como $B = (x,0)$, com $x>0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(B) < 0$.



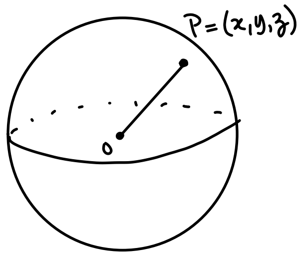
(3) $z = f(x-y) = f(u)$, onde $u = x-y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du}\cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{du}\cdot(-1)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{du} - \frac{df}{du} = 0.$$

(4)



$$T(P) = \frac{k}{d(0,P)} \Rightarrow T(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$120 = T(1,2,2) = \frac{k}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \Rightarrow k = 360.$$

A função de temperatura é $T(x,y,z) = \dfrac{360}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

$$\Rightarrow \nabla T = \left(\frac{-360\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}, \frac{-360\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}, \frac{-360\cdot\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{-360x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-360y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-360z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

Tomando a direção unitária:

$$\|(1,-1,1)\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,1)$$

Portanto,

$$\frac{\partial T}{\partial u}(1,2,2) = \nabla T(1,2,2)\bullet u = \left(\frac{-360}{27}, \frac{-720}{27}, \frac{-720}{27}\right)\bullet\frac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,1)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{360}{27} + \frac{720}{27} - \frac{720}{27}\right) = -\frac{360\sqrt{3}}{81} = -\frac{40\sqrt{3}}{9}.$$

(5) Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange:

$$f(x,y,z) = 2x + 2y + z \Rightarrow \nabla f = (2,2,1)$$

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \nabla g = (2x, 2y, 2z)$$

$$\therefore \begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2\lambda x & (\div 2) \\ 2 = 2\lambda y & (\div 2) \\ 1 = 2\lambda z & (\div 2) \\ x^2+y^2+z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x = 1 \\ \lambda y = 1 \\ \lambda z = 1/2 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$$

Note que $\lambda \neq 0$, caso contrário, por (1), teríamos $0 = 1$.

$$\therefore \begin{cases} x = 1/\lambda & (1) \\ y = 1/\lambda & (2) \\ z = 1/2\lambda & (3) \\ x^2+y^2+z^2 = 9 & (4) \end{cases}$$

Substituindo (1), (2) e (3) em (4):

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 9 \Rightarrow \frac{4+4+1}{4\lambda^2} = 9$$

$$\Rightarrow 36\lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

P/ $\lambda = \frac{1}{2}$: $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$

P/ $\lambda = -\frac{1}{2}$: $x = -2$, $y = -2$, $z = -1$.

Avaliando f nos pontos:

$$f(2,2,1) = 4+4+1 = 9$$

$$f(-2,-2,-1) = -4-4-1 = -9$$

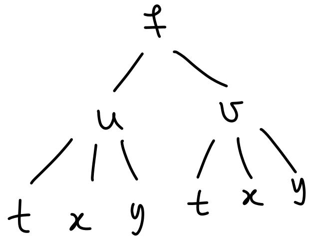
Assim, $(2,2,1)$ é ponto de máximo e $(-2,-2,-1)$ é ponto de mínimo.

⑥ a) $f(x,y) = x^2 y + 2xy^2 + 5y^3$

$$f(tx,ty) = t^2x^2ty + 2txt^2y^2 + 5t^3y^3 = t^3x^2y + t^3 2xy^2 + t^3 5y^3$$
$$= t^3(x^2y + 2xy^2 + 5y^3) = t^3 f(x,y), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Além disso, como f é polinomial, tem derivadas parciais de todas as ordens contínuas. Portanto, é homogênea de grau 3.

b) Temos que $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$. Pondo $u = tx$ e $v = ty$, temos:



$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f(tx,ty)\right) = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot y$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^n f(x,y)\right) = n t^{n-1} f(x,y)$$

$$\therefore \quad x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v} = n t^{n-1} f(x,y)$$

Tomando $t=1$, temos $u = x$, $v = y$ e

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = n f(x,y).$$