| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| Nota | |

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS**
**Álgebra Linear e Geometria Analítica — Avaliação P2**
**Prof. Adriano Barbosa**

Eng. Mecânica 24/10/2022

**Aluno(a):**.......................................................................................

**Todas as respostas devem ser justificadas.**

1. Determine uma base para os subespaços de $\mathbb{R}^3$ abaixo.
   (a) o plano $x + z = 0$.
   (b) a reta $x = t$, $y = 3t$, $z = -t$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z, t) = (y - x + t - z, z - t + y - x)$.
   (a) Determine a matriz canônica de $T$.
   (b) Determine o núcleo de $T$. $T$ é injetiva?
   (c) Determine a imagem de $T$. $T$ é sobrejetiva?

3. Encontre a transformação linear resultante da aplicação de uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ radianos no sentido anti-horário seguida de uma projeção ortogonal no eixo $x$.

4. Calcule os autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, -y, y + z)$.

5. Determine se a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

*Boa Prova!*

# Solução P2

① a) $x+z=0 \Leftrightarrow z=-x$. Os pontos do plano têm coordenadas $(x,y,-x)$, $x,y\in\mathbb{R}$. Logo,

$$(x,y,-x) = (x,0,-x) + (0,y,0) = x(1,0,-1) + y(0,1,0).$$

Assim, o conjunto $\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ gera o plano. Além disso, como os vetores não são múltiplos, o conjunto é LI e portanto uma base do plano.

b) Os pontos da reta são da forma $(t,3t,-t)$, $t\in\mathbb{R}$. Logo,

$$(t,3t,-t) = t(1,3,-1).$$

Assim, o conjunto $\{(1,3,-1)\}$ gera a reta e é LI por ter apenas um elemento. Portanto, uma base da reta.

② a) $$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $T(x,y,z,t) = (0,0) \Rightarrow (y-x+t-z,\ z-t+y-x) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y-z+t=0 & ① \\ -x+y+z-t=0 & ② \end{cases}$$

① $\Rightarrow t = x-y+z$

substituindo em ②: $-x+y+z-x+y-z=0 \Rightarrow -2x+2y=0$

$\Rightarrow y=-x$.

$\Rightarrow t = x-(-x)+z \Rightarrow t = 2x+z$

Portanto, os vetores do núcleo de $T$ são da forma

$(x, -x, z, 2x+z)$, $x, z \in \mathbb{R}$.

Como $N(T) \neq \{\vec{0}\}$, $T$ não é injetiva.

c) Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$T(x,y,z,t) = (x_0, y_0) \Rightarrow (-x+y-z+t, -x+y+z-t) = (x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y-z+t = x_0 & ① \\ -x+y+z-t = y_0 & ② \end{cases}$$

$$① + ② \Rightarrow -2x+2y = x_0 + y_0 \Rightarrow 2(-x+y) = x_0 + y_0 \Rightarrow -x+y = \frac{x_0+y_0}{2}$$

Substituindo em ①:

$$\frac{x_0+y_0}{2} - z + t = x_0 \Rightarrow -z+t = x_0 - \frac{x_0}{2} - \frac{y_0}{2} \Rightarrow -z+t = \frac{x_0-y_0}{2}$$

$\therefore \left(x, \frac{x_0+y_0}{2} + x, z, \frac{x_0-y_0}{2} + z\right)$, $x, z \in \mathbb{R}$ são sol. do sistema.

Dessa forma, existe $u \in \mathbb{R}^4$ tal que $T(u) = v$ qualquer que seja $v \in \mathbb{R}^2$. Assim, $Im(T) = \mathbb{R}^2$ e portanto $T$ é sobrejetiva.

③ Temos que:

$$[R_{\pi/4}] = \begin{bmatrix} \cos \pi/4 & -\operatorname{sen} \pi/4 \\ \operatorname{sen} \pi/4 & \cos \pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [T] = [P_x] \cdot [R_{\pi/4}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(T-\lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1.$$

Calculando os autovetores:

$$\lambda = 1: \quad T - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

$\therefore (x, 0, z),\ x, z \in \mathbb{R}.$

$$\lambda = -1: \quad T - (-1)I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 & \Rightarrow y = -2x \\ 0 = 0 & \\ y + 2z = 0 & \Rightarrow y = -2z \end{cases} \Rightarrow x = z.$$

$\therefore (x, -2x, x),\ x \in \mathbb{R}.$

5. $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 25 + 8 = 33 > 0$$

Logo, A tem dois autovalores distintos. Assim, é possível obter uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores (cada um assoc. a um dos autovalores). Portanto, A é diagonalizável.