UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS **Cálculo Diferencial e Integral — Avaliação P2** **Prof. Adriano Barbosa**	1	
	2	
	3	
Física — 06/06/2022	4	
	5	
	Nota	

Aluno(a):...

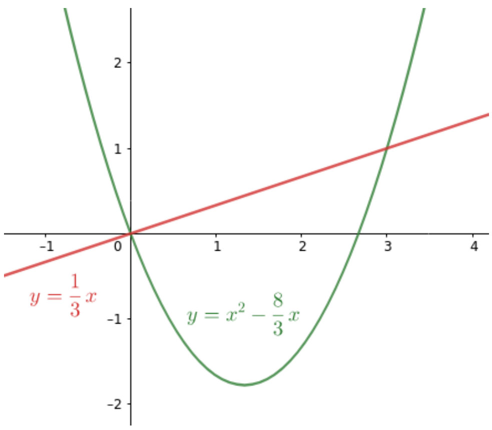
Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Calcule o limite $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$.

2. Um tanque cilíndrico com raio 3m está enchendo com água a uma taxa de 2m^3/min. Quão rápido a altura da água está aumentando?

3. Explique o efeito de cada linha abaixo no gráfico de f e esboce o gráfico da função tal que:
$f(0) = 0, f'(-1) = f'(3) = 0$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
$f'(x) < 0$ em $(-\infty, -1)$ e $(3, +\infty)$
$f'(x) > 0$ em $(-1, 3)$
$f''(x) > 0$ em $(-2, 0)$ e $(5, +\infty)$
$f''(x) < 0$ em $(-\infty, -2)$ e $(0, 5)$

4. Calcule a área entre as curvas $y = x^2 - \frac{8}{3}x$ e $y = \frac{1}{3}x$.



5. Calcule o volume da região delimitada por $y = 2x$, $y = x^2$ rotacionada ao redor do eixo x.

Boa Prova!

Solução

(1) Quando $x \to 0^+$, $\sqrt{x} \to 0$ e $\lim_{x \to 1^+} x^{\sqrt{x}}$ é indeterm. tipo 0^0.

Observe que:

$$x^{\sqrt{x}} = e^{\ln(x^{\sqrt{x}})} = e^{\sqrt{x}\ln x} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} x^{\sqrt{x}} = e^{\lim_{x \to 0^+}(\sqrt{x} \cdot \ln x)}$$

Mas,

$$\lim_{x \to 0^+}(\sqrt{x}\ln x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$ é indeterm. do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Por L'Hospital:

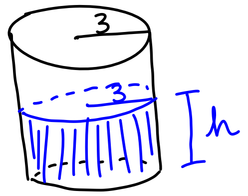
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2x\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -2\sqrt{x} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\sqrt{x}} = e^0 = 1.$$

(2)



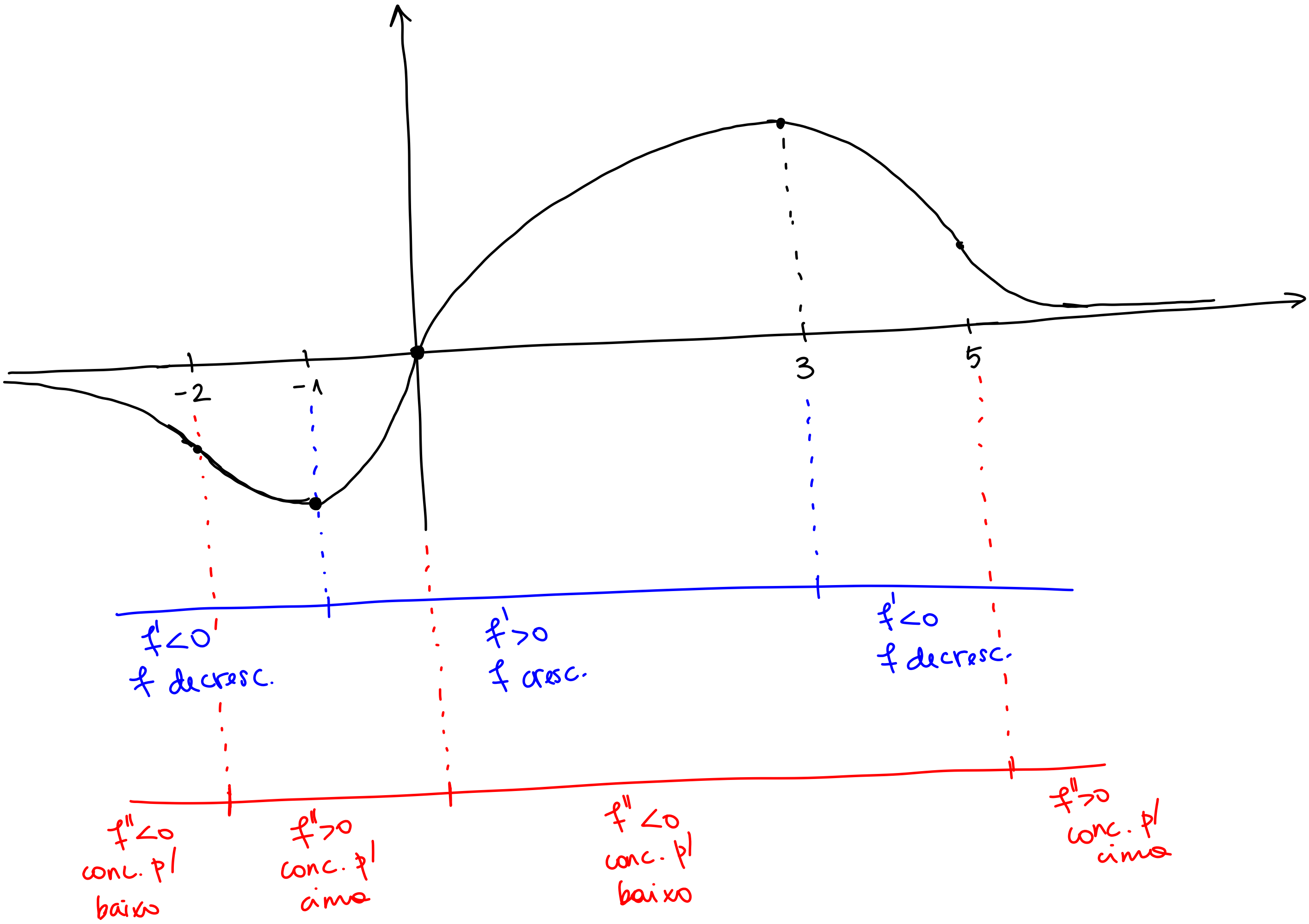
Sejam V e h o volume e altura do cilindro azul. Logo,

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}.$$

Queremos $\frac{dh}{dt}$ e sabemos que $\frac{dV}{dt} = 2$, então:

$$2 = \pi \cdot 3^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{2}{9}\pi \text{ m/min}.$$

(3) $x = -1$ e $x = 3$ são pontos críticos.



$x = -1$ é mín. local, pois f' muda de negativo p/ positivo.

$x = 3$ é máx. local, pois f' muda de positivo p/ negativo.

④ Calculando as interseções entre as curvas:

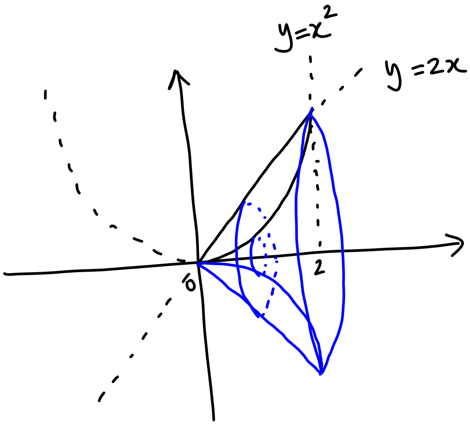
$$x^2 - \frac{8}{3}x = \frac{1}{3}x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3.$$

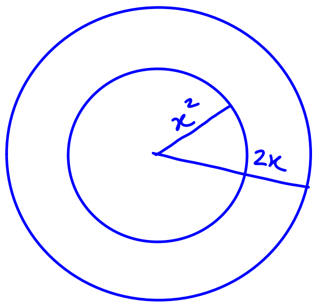
Logo,

$$A = \int_0^3 \frac{1}{3}x - x^2 + \frac{8}{3}x \, dx = \int_0^3 -x^2 + 3x \, dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 \Big|_0^3$$

$$= -\frac{27}{3} + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$$

⑤





Interseção: $x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

$$A(x) = \pi(2x)^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(4x^2 - x^4)$$

$$\therefore V = \int_0^2 \pi(4x^2 - x^4)\,dx = \pi\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\Big|_0^2\right) = \pi\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{64}{15}\pi$$