UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral — Avaliação PS
Prof. Adriano Barbosa

Engenharia de Computação 13/06/2022

1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

Avaliação P1:

1. Encontre a equação da reta tangente a $f(x) = 4\,\mathrm{sen}^2 x$ no ponto $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$.

2. Seja $f(x) = \sqrt{4x+1}$. Calcule $f''(x)$.

3. Se $g(x) = f(x) + x^2[f(x)]^3$ e $f'(1) = f(1) = 2$, calcule $g'(1)$.

4. Se $f(x) = e^{3x}$, encontre a fórmula para $f^{(n)}(x)$ (derivada de ordem n) em função de n.

5. Determine os pontos onde a tangente a $f(x) = x \ln x - x$ é horizontal.

Avaliação P2:

1. Encontre o erro no cálculo abaixo e calcule o limite corretamente.
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 - x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 2x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x-2}{6x-2} = 1$$

2. Dado que $x^2 + y^2 = 2x + 4y$, onde x e y são funções de t, calcule $\dfrac{dy}{dt}$ sabendo que $\dfrac{dx}{dt} = -5$ quando $(x, y) = (3, 1)$.

3. Mostre que entre todos os retângulos de perímetro p, o quadrado é o que tem a maior área.

4. Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = x + 1, y = 9 - x^2, x = -1$ e $x = 2$.

5. Utilizando integrais, calcule o volume da pirâmide de altura H e base quadrada de lado L.

Boa Prova!

P1 - Solução

① A inclinação da tangente a f em $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ é dada por $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, logo

$$f'(x) = 4 \cdot 2\,\text{sen}x \cdot \cos x = 8\,\text{sen}x \cos x$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Portanto, a eq. da tangente é

$$y - 1 = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = 2\sqrt{3}\,x - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + 1.$$

② $f(x) = \sqrt{4x+1}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x+1}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x+1}} \cdot 4}{\left(\sqrt{4x+1}\right)^2} = \frac{\frac{-4}{\sqrt{4x+1}}}{\left(\sqrt{4x+1}\right)^2} = -\frac{4}{\left(\sqrt{4x+1}\right)^3}$$

③ Derivando:

$$g'(x) = f'(x) + 2x\left[f(x)\right]^3 + x^2 \cdot 3\left[f(x)\right]^2 \cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow g'(1) = f'(1) + 2 \cdot 1 \cdot \left[f(1)\right]^3 + 1^2 \cdot 3\left[f(1)\right]^2 \cdot f'(1)$$

$$= 2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 2 = 2 + 16 + 24 = 42.$$

4 Derivando:

$$f'(x) = 3e^{3x}$$

$$f''(x) = 3\cdot 3e^{3x} = 3^2 e^{3x}$$

$$f'''(x) = 3^2\cdot 3e^{3x} = 3^3 e^{3x}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$$

5 Derivando:

$$f'(x) = 1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x.$$

A tangente é horizontal se $f'(x)=0$, logo

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Portanto, a tangente a f é horizontal em

$$(1, f(1)) = (1, -1).$$

P2 - Solução

① Resolvendo o limite:

$$x \to 1 \Rightarrow x^3 - x^2 + x - 1 \to 0 \quad e \quad x^3 - x^2 \to 0$$

e o primeiro limite é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Por L'Hospital, vale a primeira igualdade.

No segundo limite temos que:

$$3x^2 - 2x + 1 \xrightarrow{x \to 1} 2$$

$$3x^2 - 2x \xrightarrow{x \to 1} 1$$

Logo, não há indeterminação e não podemos usar a regra de L'Hospital. O segundo limite é igual a 2.

② $x^2 + y^2 = 2x + 4y$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(2x + 4y) \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt}.$$

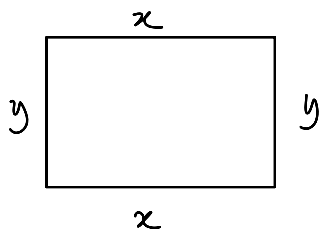
Quando $(x, y) = (3, 1)$ e $\frac{dx}{dt} = -5$, temos:

$$2 \cdot 3 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 \cdot \frac{dy}{dt} = 2 \cdot (-5) + 4\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow -30 + 2\frac{dy}{dt} = -10 + 4\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow 2\frac{dy}{dt} = -20 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -10.$$

③



$$p = 2x + 2y \Rightarrow y = \frac{p-2x}{2} = \frac{p}{2} - x$$

$$A = x \cdot y \Rightarrow A(x) = x\left(\frac{p}{2} - x\right) = \frac{p}{2}x - x^2$$

Calculando os pontos críticos de $A(x)$:

$A'(x) = \frac{p}{2} - 2x$ está def. para todo $x \in \mathbb{R}$.

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{p}{2} - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{p}{2} \Leftrightarrow x = \frac{p}{4}$.

Logo, $x = \frac{p}{4}$ é ponto crítico de $A(x)$.

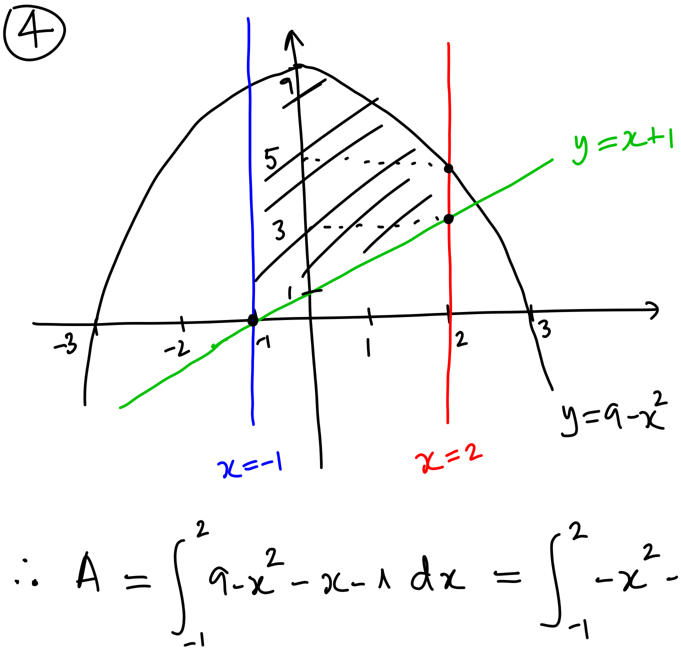
Aplicando o teste da 2ª derivada:

$A''(x) = -2 \Rightarrow A''\left(\frac{p}{4}\right) = -2 < 0 \Rightarrow x = \frac{p}{4}$ é pto de máx. local.

Portanto, o máx. de A ocorre quando $x = \frac{p}{4}$

$\Rightarrow y = \frac{p}{2} - \frac{p}{4} = \frac{p}{4} = x$ e o retângulo é um quadrado.

④



Observe que:

$x = -1 \Rightarrow y = -1 + 1 = 0$

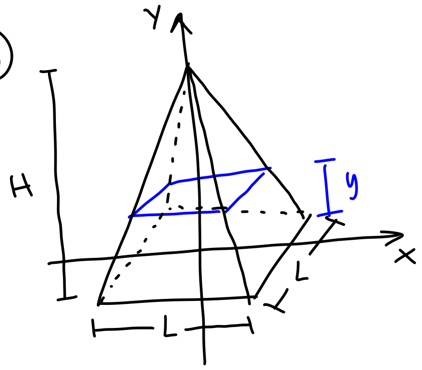
$x = 2 \Rightarrow y = 2 + 1 = 3$

e $y = 9 - 2^2 = 5$

$9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

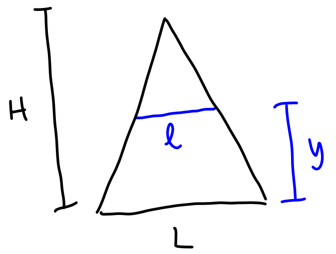
$$\therefore A = \int_{-1}^{2} 9 - x^2 - x - 1 \, dx = \int_{-1}^{2} -x^2 - x + 8 \, dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 8x \Big|_{-1}^{-2} = \frac{39}{2}$$

⑤



Os cortes paralelos a base da pirâmide tem o formato de quadrado de lado ℓ.

Por semelhança de triângulos:



$$\frac{\ell}{y} = \frac{L}{H} \Rightarrow \ell = \frac{L}{H} y$$

Assim, a área do corte é:

$$A(y) = \ell^2 = \frac{L^2}{H^2} y^2$$

Portanto,

$$V = \int_0^H A(y)\, dy = \int_0^H \frac{L^2}{H^2} y^2 dy = \frac{L^2}{H^2} \int_0^H y^2 dy = \frac{L^2}{H^2} \left(\frac{y^3}{3} \Big|_0^H \right)$$

$$= \frac{L^2}{H^2} \left(\frac{H^3}{3} \right) = \frac{L^2 H}{3}.$$