1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral — Avaliação P2
Prof. Adriano Barbosa

Engenharia de Computação 06/06/2022

Aluno(a):...

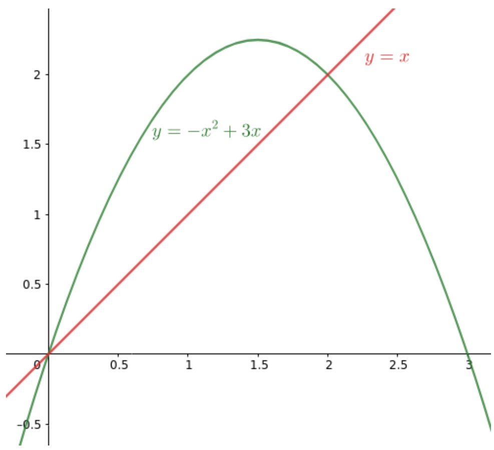
Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$.

2. Cada lado de um quadrado está aumentando a uma taxa de 3cm/s. A que taxa a área do quadrado está aumentando quando sua área é 12cm^2?

3. Explique o efeito de cada linha abaixo no gráfico de f e esboce o gráfico da função tal que:
$f(0) = 0, f'(-2) = f'(1) = f'(9) = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to 6} f(x) = -\infty$
$f'(x) < 0$ em $(-\infty, -2), (1, 6)$ e $(9, +\infty)$
$f'(x) > 0$ em $(-2, 1)$ e $(6, 9)$
$f''(x) > 0$ em $(-\infty, 0)$ e $(12, +\infty)$
$f''(x) < 0$ em $(0, 6)$ e $(6, 12)$

4. Calcule a área entre as curvas $y = -x^2 + 3x$ e $y = x$.



5. Calcule o volume da região delimitada por $x = 1 + y^2$, $y = x - 3$ rotacionada ao redor do eixo y.

Boa Prova!

Solução

① Quando $x \to 1^+$, temos que:

$$1 - x \to 0^- \Rightarrow \frac{1}{1-x} \longrightarrow -\infty.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$ é uma indeterminação.

Note que:

$$x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}} = e^{\frac{1}{1-x} \cdot \ln x}$$

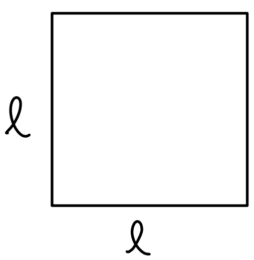
$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{1-x} \cdot \ln x\right)} = e^{\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{1-x}} \quad \text{ind. tipo } \frac{0}{0}$$

Por L'Hospital:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x \to 1^+} -\frac{1}{x} = -1.$$

$$\therefore \lim_{x \to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

②



Seja ℓ a medida do lado do quadrado. Temos que sua área é ℓ^2. Temos que:

$$A = \ell^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\ell \cdot \frac{d\ell}{dt}$$

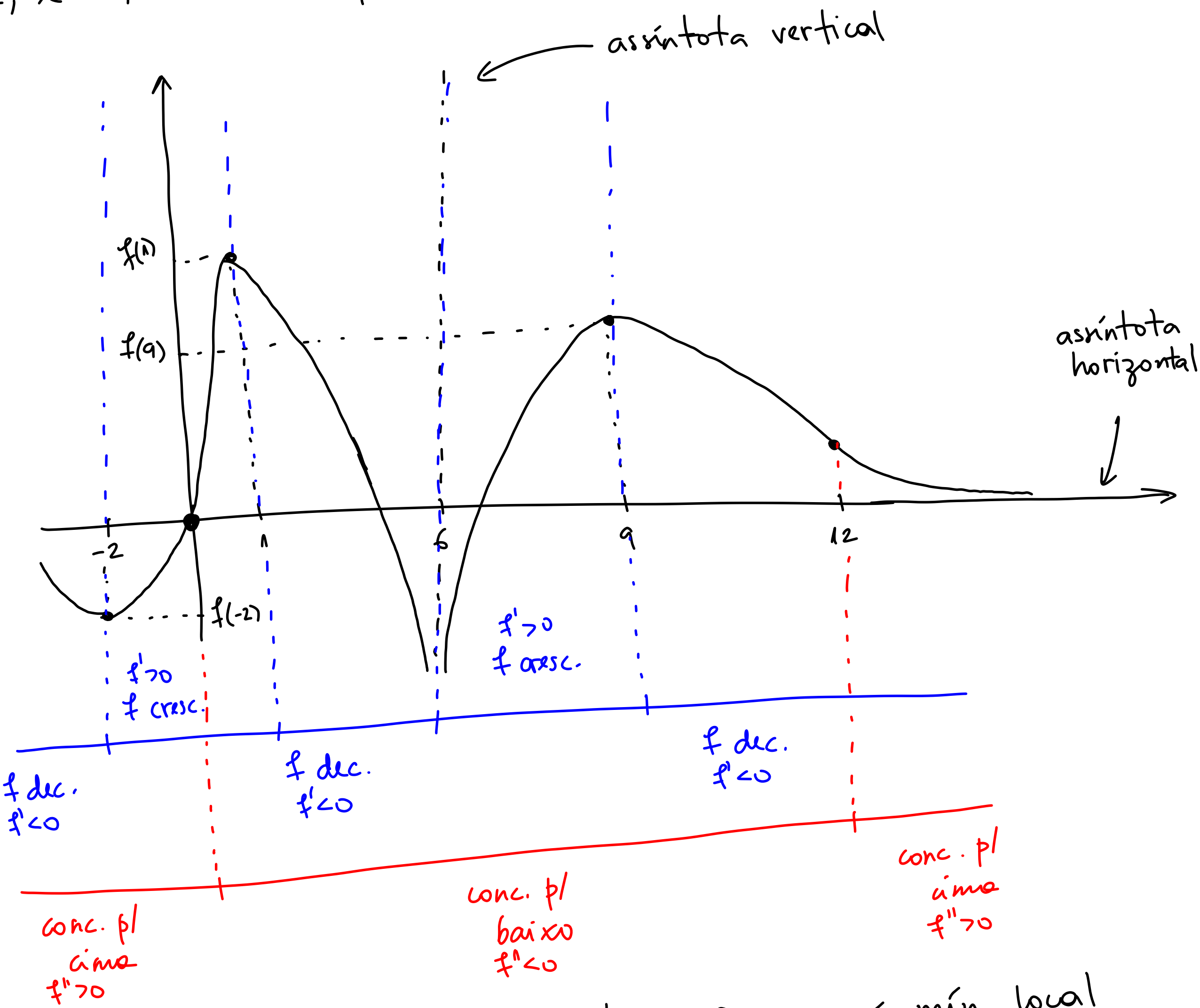
Assim, quando $A=12$:

$$A=12 \Rightarrow \ell^2 = 12 \overset{(\ell>0)}{\Rightarrow} \ell = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Portanto,

$$\frac{dA}{dt} = 2\ell \cdot \frac{d\ell}{dt} = 4\sqrt{3}\cdot 3 = 12\sqrt{3} \ cm^2/s.$$

③ $x=-2$, $x=1$, $x=9$ são pontos críticos.



f' muda de sinal em $x=-2$ de neg. p/ pos. $\Rightarrow x=-2$ é mín. local

f' muda de sinal em $x=1$ de pos. p/ neg. $\Rightarrow x=1$ é máx. local

f' muda de sinal em $x=9$ de pos. p/ neg. $\Rightarrow x=9$ é máx local

④ Interseções:

$$-x^2+3x = x \iff -x^2+2x=0 \iff x(-x+2)=0$$

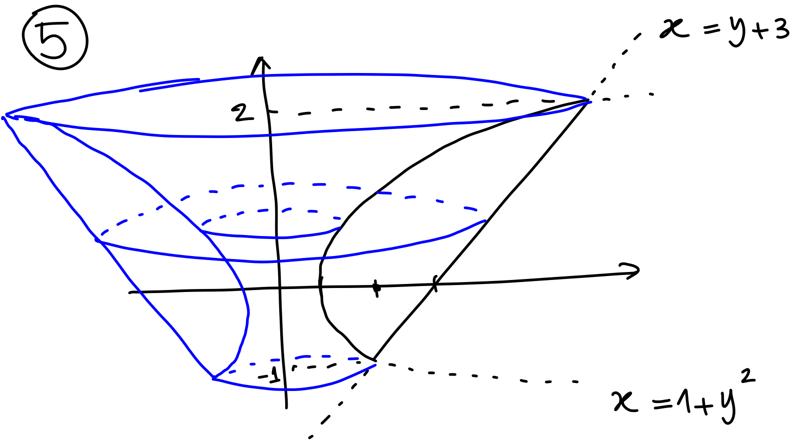
$$\iff x=0 \quad \text{ou} \quad x=2.$$

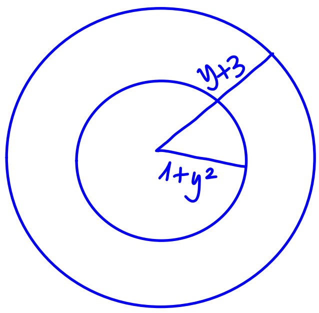
Logo,

$$A = \int_0^2 -x^2+3x-x\,dx = \int_0^2 -x^2+2x\,dx = -\frac{x^3}{3}+x^2\Big|_0^2$$

$$= -\frac{8}{3}+4 = \frac{-8+12}{3} = \frac{4}{3}.$$

⑤





Interseções:

$$1+y^2 = y+3 \Rightarrow y^2-y-2=0 \Rightarrow y=-1 \quad \text{ou} \quad y=2.$$

$$A(y) = \pi(y+3)^2 - \pi(1+y^2)^2 = \pi(y^2+6y+9) - \pi(1+2y^2+y^4)$$

$$= \pi(-y^4-y^2+6y+8)$$

$$\therefore V = \int_{-1}^{2} \pi(-y^4-y^2+6y+8)\,dy = \pi\left(-\frac{y^5}{5}-\frac{y^3}{3}+3y^2+8y\Big|_{-1}^{2}\right)$$

$$= \pi\left(-\frac{32}{5}-\frac{8}{3}+3\cdot 4+8\cdot 2-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}-3+8\right) = \frac{117}{5}\pi.$$