1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral III — Avaliação P2
Prof. Adriano Barbosa

Engenharia Civil 07/06/2019

Aluno(a):..

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Calcule a integral dupla $\iint_D \cos(x^3)\, dA$, onde D é a região delimitada pela parábola $y = x^2$, pela reta vertical $x = 1$ e pelo eixo x.

2. Calcule a integral $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$. (Dica: use coordenadas polares)

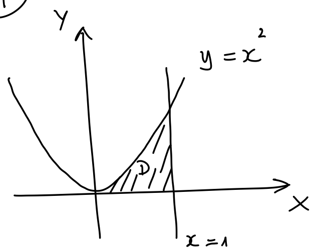
3. Calcule $\iiint_E x^2 + y^2 + z^2\, dV$, onde E está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

4. Calcule o trabalho realizado pelo campo $F(x, y) = (2x - 3y, -3x + 4y - 8)$ ao mover uma partícula de $(0, 0)$ a $(2, 1)$.

5. Calcule a integral de linha $\int_C xy\, dx + x^2\, dy$, onde C é o retângulo com vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$ e $(0, 1)$.

Boa Prova!

1



$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$$

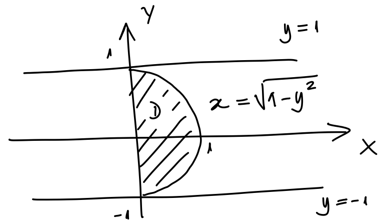
$$\iint_D \cos x^3 \, dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} \cos x^3 \, dy \, dx = \int_0^1 \cos x^3 \cdot y \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \cos x^3 (x^2 - 0) \, dx = \int_0^1 x^2 \cdot \cos x^3 \, dx \overset{(u=x^3)}{=} \frac{1}{3}\int_0^1 \cos u \, du = \frac{1}{3} \operatorname{sen} u \Big|_0^1 = \frac{\operatorname{sen} 1}{3}.$$

2 A região de integração é tal que:

$-1 \le y \le 1$

$0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$



Em coordenadas polares: $D = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$.

Assim,

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 e^{-r^2} \cdot r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \int_0^1 e^{-r^2} \cdot r \, dr$$

$$\overset{(u=-r^2)}{=} \left(\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^u \, du\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^u \, du\right) = \frac{\pi}{2}\left(e^u \Big|_{-1}^0\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-1}\right).$$

3 Em coordenadas esféricas: $E = \{(\rho,\theta,\phi) \mid 2 \le \rho \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi\}$

Logo,

$$\iiint_E x^2 + y^2 + z^2 \, dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_2^3 \rho^2 \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi = \int_0^\pi \operatorname{sen}\phi \, d\phi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_2^3 \rho^4 \, d\rho$$

$$= \left(-\cos\phi \Big|_0^\pi\right) \cdot \left(\theta \Big|_0^{2\pi}\right) \cdot \left(\frac{\rho^5}{5}\Big|_2^3\right) = (-\cos\pi + \cos 0) \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{3^5}{5} - \frac{2^5}{5}\right) = \frac{844\pi}{5}$$

④ O campo F é conservativo. De fato, se f é tal que $\nabla f = F$, então

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -3x + 4y - 8 & (2) \end{cases}$$

De (1), temos:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int 2x - 3y\, dx \Rightarrow f(x,y) = x^2 - 3xy + C(y)$$

Substituindo em (2):

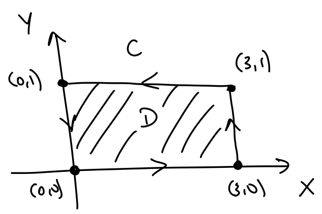
$$-3x + 4y - 8 \overset{(2)}{=} \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 4y - 8$$

$$\Rightarrow C(y) = 4\frac{y^2}{2} - 8y = 2y^2 - 8y$$

Portanto, $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 8y$ é uma função potencial de F.

Pelo Teo. Fund. das Int. de Linha:

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(2,1) - f(0,0) = -8$$

⑤ 

A curva C é fechada, simples, orient. positivamente e suave por partes.

$F(x,y) = (xy, x^2) \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ e $\dfrac{\partial P}{\partial y} = x$ são contínuas.

Pelo Teo. de Green:

$$\int_C xy\, dx + x^2 dy = \iint_D 2x - x\, dA = \int_0^1 \int_0^3 x\, dx\, dy = \int_0^1 dy \cdot \int_0^3 x\, dx$$

$$= \left(y \Big|_0^1 \right) \cdot \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^3 \right) = (1-0) \cdot \left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{9}{2}.$$