1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Álgebra Elementar — Avaliação PS
Prof. Adriano Barbosa

Matemática 07/12/2018

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

Avaliação P1:

1. Dadas as proposições p : João é feliz, q : Maria é alta. Escreva usando a linguagem corrente as proposições abaixo:

   (a) $\sim p$

   (b) $p \wedge q$

   (c) $p \vee q$

   (d) $(\sim p) \rightarrow q$

2. Determine se a equivalência $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ é válida.

3. Escreva a forma contrária, a contrapositiva e a recíproca da proposição P : Se eu não for ao parque, então irei circo.

4. Determine o conjunto verdade das sentenças abertas:

   (a) $x \in \mathbb{N}$ tal que $2x^2 - x = 0$

   (b) $x \in \mathbb{Z}$ tal que $2x^2 - x = 0$

   (c) $x \in \mathbb{Q}$ tal que $2x^2 - x = 0$

   (d) $x \in \mathbb{R}$ tal que $2x^2 - x = 0$

5. Mostre que se mn é um inteiro ímpar, então m e n são ambos inteiros ímpares.

Avaliação P2:

1. Dados $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas:

   (a) $1 \in A$ (b) $\{1\} \in A$ (c) $\{1\} \subset A$ (d) $\varnothing \in A$

   (e) $A \subset B$ (f) $A \in B$ (g) $\varnothing \in \{\varnothing, A\}$ (h) $\varnothing \subset \{\varnothing, A\}$

   (i) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, A\}$ (j) $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, A\}$

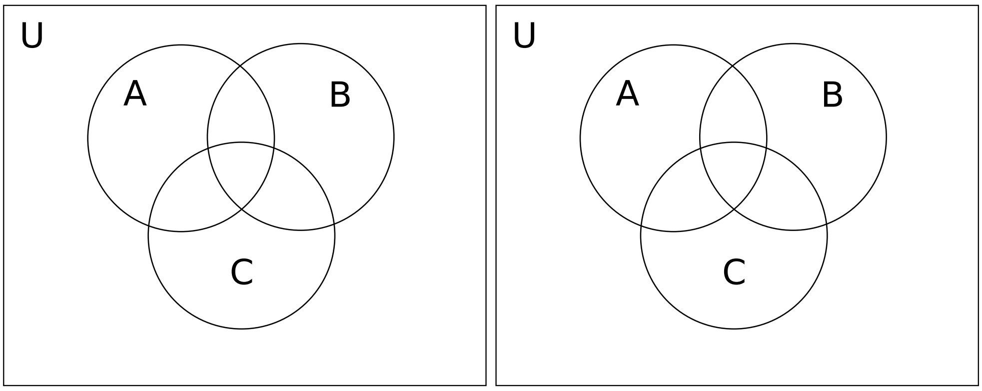
2. Mostre que $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$, quaisquer que sejam os conjuntos A e B.

3. Use o princípio de indução para mostrar que

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

4. Determine no diagrama de Venn cada um dos conjuntos abaixo:

(a) $A - (B \cap C)$ (b) $(A - B) \cup (A - C)$



5. Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{-i, i\}$, determine os elementos de:

(a) $A \times B$

(b) $B \times A$

(c) $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Boa Prova!

Avaliação P1:

① a) João não é feliz.

b) João é feliz e Maria é alta.

c) João é feliz ou Maria é alta.

d) Se João não é feliz, então Maria é alta.

② Construindo a tabela verdade:

$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$\sim$	p	$\vee$	$\sim$	q
F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V	F

Como o bicondicional é uma tautologia, temos que a equivalência é válida.

③ Sejam

p: não vou ao parque.

q: vou ao circo.

Logo, $P: p \to q$. Assim,

contrária $(\sim p \to \sim q)$: Se eu for ao parque, então não vou ao circo.

contrapositiva $(\sim q \to \sim p)$: Se não vou ao circo, então vou ao parque.

recíproca $(q \to p)$: Se vou ao circo, então não vou ao parque.

④ Resolvendo a equação para $x \in \mathbb{R}$:

$$2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

a) ϕ

b) $\{0\}$

c) $\{0, \frac{1}{2}\}$

d) $\{0, \frac{1}{2}\}$

⑤ Sem perda de generalidade, suponha que m é par, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2k$. Logo,

$$m \cdot n = 2k \cdot n = 2(kn) = 2p, \quad \text{com } p = kn \in \mathbb{Z}.$$

Um absurdo, pois $m \cdot n$ é ímpar.

Avaliação P2:

① a) 1 é elemento do conj. A, isto é, $1 \in A$.

b) O conjunto $\{1\}$ não é elemento do conjunto A, logo $\{1\} \notin A$.

c) Todo elemento de $\{1\}$ também é elemento de A, então $\{1\} \subset A$.

d) O conjunto vazio não é elemento de A. Assim, $\emptyset \notin A$.

e) Todo elemento de A é também elemento de B, ou seja, $A \subset B$.

f) O conjunto A não é elemento de B, logo $A \notin B$.

g) $\emptyset$ é elemento do conjunto $\{\emptyset, A\}$. Assim, $\emptyset \in \{\emptyset, A\}$.

h) $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto, logo $\emptyset \subset A$.

i) O conjunto formado pelo conjunto vazio $\{\emptyset\}$ não é elemento de $\{\emptyset, A\}$. Assim, $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset, A\}$.

j) $\emptyset$ é elemento de $\{\emptyset, A\}$, ou seja, $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, A\}$.

② Dado $x \in (A \cap B)^c$, temos que

$$x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \Rightarrow x \in A^c \text{ ou } x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c.$$

Assim, $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$. Por outro lado, dado $x \in A^c \cup B^c$,

$$x \in A^c \text{ ou } x \in B^c \Rightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^c,$$

logo $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$. Portanto, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

③ Usando indução sobre n:

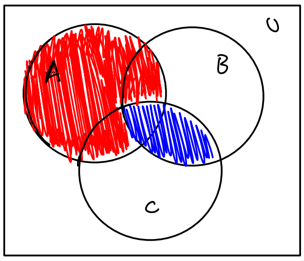
Para $n = 1$: $2^1 = 2 = 2^{1+1} - 2$.

Supondo que $2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$, temos que

$$2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2^{(n+1)+1} - 2.$$

Portanto, pelo princípio de indução, a fórmula vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

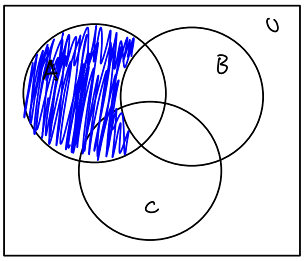
4 a)



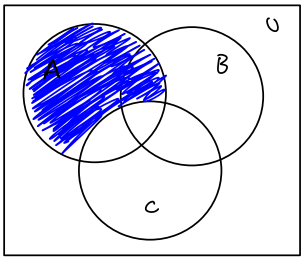
$B \cap C$

$A - (B \cap C)$

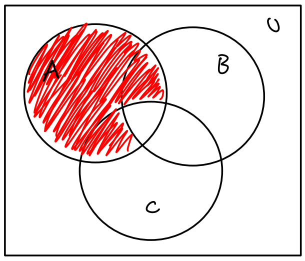
b)



$A - B$



$A - C$



$(A - B) \cup (A - C)$

5 a) $A \times B = \{(-1,-i), (-1,i), (0,-i), (0,i), (1,-i), (1,i)\}$

b) $B \times A = \{(-i,-1), (-i,0), (-i,1), (i,-1), (i,0), (i,1)\}$

c) $A \times A = \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (0,-1), (0,0), (0,1), (1,-1), (1,0), (1,1)\}$

$R = \{(-1,0), (0,-1), (0,1), (1,0)\}$