1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Álgebra Elementar — Avaliação P2
Prof. Adriano Barbosa

Matemática 30/11/2018

Aluno(a):..

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Dê um exemplo de conjuntos A, B e C tais que:

   (a) $A \subset B$, $B \not\subset C$ e $A \subset C$

   (b) $A \not\subset B$, $B \not\subset C$ e $A \subset C$

   (c) $A \in B$, $B \notin C$ e $A \notin C$

2. Mostre que $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

3. Use o princípio de indução para mostrar que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. Sejam $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$, $B = (2, 5]$ e $C = (3, 6)$. Determine os conjuntos:

   (a) $A - B$

   (b) $A \cap B$

   (c) $A - C$

   (d) $A \cup C$

5. Dados os conjuntos $A = \{2, 6, 12\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$:

   (a) Determine os elementos do conjunto $A \times B$.

   (b) Determine os elementos da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y \text{ divide } x\}$.

Boa Prova!

① a) Tomando $B=\{1,2\}$, $C=\{2,3\}$ e $A=\{2\}$, temos $A\subset B$, $A\subset C$ e $B\not\subset C$, pois $1\in B$ e $1\notin C$.

b) Tomando $A=\{a\}$, $C=\{a,c\}$ e $B=\{b\}$, temos $A\subset C$, $A\not\subset B$, pois $a\in A$ e $a\notin B$, e $B\not\subset C$, pois $b\in B$ e $b\notin C$.

c) Tomando $A=\{{\color{blue}\bullet},{\color{red}\bullet}\}$, $B=\{\{{\color{blue}\bullet},{\color{red}\bullet}\},\{\bullet\}\}$ e $C=\{{\color{green}\bullet}\}$, temos $A\in B$, $B\notin C$, pois $\{\bullet\}\in B$ e $\{\bullet\}\notin C$, e $A\notin C$.

② Seja $x\in(A\cup B)^c$, temos que:

$$x\notin A\cup B \Rightarrow x\notin A \text{ e } x\notin B \Rightarrow x\in A^c \text{ e } x\in B^c \Rightarrow x\in A^c\cap B^c.$$

Assim, todo elemento de $(A\cup B)^c$ também é elemento de $A^c\cap B^c$, ou seja, $(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$.

Reciprocamente, se $x\in A^c\cap B^c$, então:

$$x\in A^c \text{ e } x\in B^c \Rightarrow x\notin A \text{ e } x\notin B \Rightarrow x\notin A\cup B \Rightarrow x\in(A\cup B)^c.$$

Logo, $A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$.

Portanto, $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

③ Usando indução sobre n, observe que:

1) Para $n=1$: $1^2=1=\dfrac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$

2) Supondo $1^2+2^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, temos:

$$1^2+2^2+\dots+n^2{\color{blue}+(n+1)^2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}{\color{blue}+(n+1)^2}=\frac{(n^2+n)(2n+1)}{6}+n^2+2n+1$$

$$=\frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6n^2+12n+6}{6}=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}\quad(\mathrm{I})$$

Por outro lado,

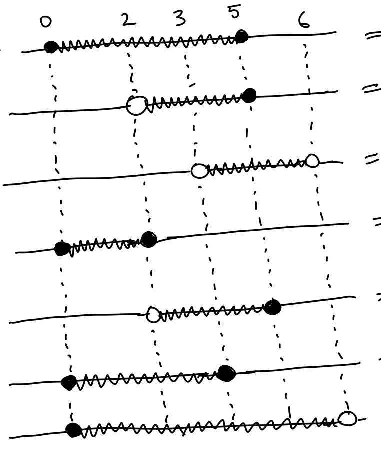
$$\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{(n^2+2n+n+2)(2n+3)}{6}$$

$$=\frac{2n^3+3n^2+4n^2+6n+2n^2+3n+4n+6}{6}$$

$$=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}\quad(\mathrm{II})$$

Como $(\mathrm{I})=(\mathrm{II})$, segue-se, pelo princípio de indução, que a fórmula é válida.

④



$A = [0,5]$

$B = (2,5]$

$C = (3,6)$

$A - B = [0,2]$

$A \cap B = (2,5]$

$A - C = [0,3]$

$A \cup C = [0,6)$

⑤ $A = \{2, 6, 12\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$

a)

4	(2,4)	(6,4)	(12,4)
3	(2,3)	(6,3)	(12,3)
2	(2,2)	(6,2)	(12,2)
	2	6	12

$A \times B = \{(2,2), (2,3), (2,4), (6,2), (6,3), (6,4), (12,2), (12,3), (12,4)\}$

b) $R = \{(x,y) \in A \times B \mid y \text{ divide } x\} = \{(2,2), (6,2), (6,3), (12,2), (12,3), (12,4)\}$.