



UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS  
Cálculo Diferencial e Integral — Avaliação P1  
Prof. Adriano Barbosa

Eng. de Energia

17/05/2018

1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

Aluno(a): .....

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Determine o domínio das funções e calcule os limites abaixo:

(a)  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

(b)  $f(x) = \frac{\text{sen}(6x)}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

2. Mostre que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ .

[Lembre que  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , que  $x^2 \geq 0$  e use o Teorema do Confronto.]

3. Dados  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$  e  $I = (0, 1)$ :

(a) Determine se a função  $f$  é contínua no intervalo  $I$ .

(b) Mostre que a função  $f$  possui uma raiz no intervalo  $I$ .

4. Calcule a derivada das funções abaixo:

(a)  $f(x) = \frac{2x}{5 - \cos x}$

(b)  $g(x) = \ln(xe^x)$

5. Dada a equação implícita  $x^3(x - y) = y^2(x + 2y)$ , calcule  $\frac{dy}{dx}$ .

*Boa Prova!*

①a)  $\sqrt{1-x}$  está def. se  $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

$\sqrt{1+x}$  está def. se  $1+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

logo,  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$  está def. se  $x \in \overbrace{(-1,0) \cup (0,1)}^{[-1,0] \cup (0,1)}$ .

Além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1 \end{aligned}$$

b)  $f(x) = \frac{\sin(6x)}{x}$  está def. para todo  $x \neq 0$  e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{x} \cdot \frac{6}{6} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{6}{6} \cdot \frac{\sin(6x)}{6x} \right] = \frac{6}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{6x} \\ &= \frac{6}{6} \cdot \lim_{6x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{6x} = \frac{6}{6} \cdot 1, \text{ pois } x \rightarrow 0 \Rightarrow 6x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

② Temos que:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1 \quad \stackrel{(x^2)}{\Rightarrow} \quad -x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2, \text{ pois } x^2 \geq 0$$

mas,

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Pelo Teo. do Confronto,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

③ a)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$  é polinomial, logo contínua em todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Em particular, é contínua em  $I$ .

b) Observe que:

$$f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^3 + 2 = 2 > 0$$

$$f(1) = 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 2 = -1 < 0$$

Pelo Teo. do valor ~~médio~~ <sup>intermediário</sup>, existe  $c \in (0,1)$  tal que  $f(c) = 0$ .

④ a)  $f(x) = \frac{2x}{5 - \cos x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(5 - \cos x) - 2x \sin x}{(5 - \cos x)^2} = \frac{10 - 2 \cos x - 2x \sin x}{(5 - \cos x)^2}$$

b)  $g(x) = \ln(x \cdot e^x)$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x e^x} \cdot (e^x + x e^x) = \frac{e^x(1+x)}{x e^x} = \frac{1+x}{x}$$

⑤  $x^3(x-y) = y^2(x+2y)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} [x^3(x-y)] = \frac{d}{dx} [y^2(x+2y)]$$

$$\Rightarrow 3x^2(x-y) + x^3 \left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = 2y \frac{dy}{dx} (x+2y) + y^2 \left(1 + 2 \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow 3x^2(x-y) + x^3 - x^3 \frac{dy}{dx} = 2y(x+2y) \frac{dy}{dx} + y^2 + 2y^2 \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow -x^3 \frac{dy}{dx} - 2y(x+2y) \frac{dy}{dx} - 2y^2 \frac{dy}{dx} = y^2 - 3x^2(x-y) - x^3$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3x^2(x-y) - x^3}{-x^3 - 2y(x+2y) - 2y^2} = \frac{y^2 - 3x^3 + 3x^2y - x^3}{-x^3 - 2yx - 4y^2 - 2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4x^3 + 3x^2y}{-x^3 - 2yx - 6y^2}$$