1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral — Avaliação PS
Prof. Adriano Barbosa

Eng. de Alimentos 26/07/2018

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

Avaliação P1:

1. Calcule os limites:

   (a) $\lim_{x \to 25} \dfrac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$

   (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$

2. Determine o maior domínio de $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 + x}$ e os valores de x para os quais f é contínua.

3. Calcule a derivada das funções abaixo:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{\sqrt{x}}$

   (b) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(2x)$

4. Dada $y = \operatorname{sen}(\cos(1 + x^3))$. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

5. Use derivação implícita para calcular $\dfrac{dy}{dx}$, onde $y \cos x = x^2 + y^2$.

Avaliação P2:

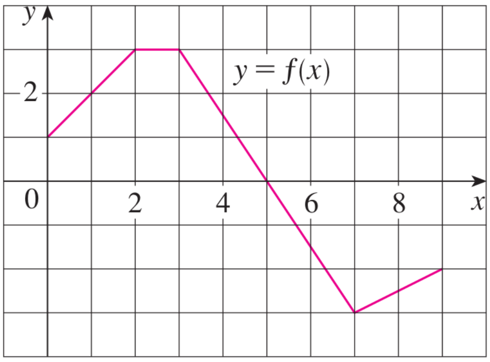
1. Dois carros começam a se mover a partir de um mesmo ponto. O primeiro viaja para sul a 60km/h e o segundo para oeste a 25km/h. A qual taxa a distância entre os carros está aumentando após duas horas da partida?

2. Uma lata cilíndrica sem tampa deve comportar 1000 cm^3 de líquido. Encontre as dimensões que minimizam o custo do metal usado para fabricar a lata.

3. Determine a função f tal que $f'(x) = x^{-1/3}$, $f(1) = 1$.

4. Calcule a integral $\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\, du$.

5. O gráfico de f é dado na figura abaixo. Calcule as integrais definidas:



(a) $\int_0^2 f(x)\, dx$ (b) $\int_3^7 f(x)\, dx$

Boa Prova!

Avaliação P1

① a) $\lim_{x\to 25} \dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5} = \lim_{x\to 25} \dfrac{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}-5} = \lim_{x\to 25} \sqrt{x}+5 = 10$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x(1+\sqrt{1-x^2})}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = 0$

② f está definida para todo x tal que $2x^2+x \neq 0$. Como $2x^2+x = x(2x+1) = 0 \iff x=0$ ou $x=-\frac{1}{2}$, o domínio de f é o conjunto $\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 0 \text{ e } x\neq -\frac{1}{2}\}$. Além disso, como f é uma função racional, é contínua em seu domínio.

③ a) $f(x) = \dfrac{x^2-x+2}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}} - \dfrac{x}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} = x^{3/2} - x^{1/2} + 2x^{-1/2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} - x^{-3/2}$

b) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(2x)$

$\Rightarrow f'(x) = 2x\operatorname{sen}(2x) + x^2\cos(2x)\cdot 2 = 2x\operatorname{sen}(2x) + 2x^2\cos(2x)$

④ Pela regra da cadeia:

$y' = \cos(\cos(1+x^3))\cdot(-\operatorname{sen}(1+x^3))\cdot 3x^2$

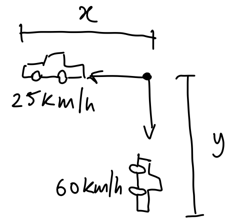
$= -3x^2\cos(\cos(1+x^3))\cdot\operatorname{sen}(1+x^3)$

⑤ Derivando implicitamente:

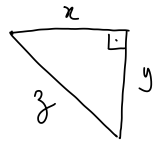
$y\cos x = x^2+y^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}\cos x + y(-\operatorname{sen}x) = 2x + 2y\dfrac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \cos x\dfrac{dy}{dx} - 2y\dfrac{dy}{dx} = 2x + y\operatorname{sen}x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+y\operatorname{sen}x}{\cos x - 2y}$

Avaliação P2

1 

Se $x(t)$ e $y(t)$ indicam a distância percorrida pelos carros, temos $\frac{dx}{dt} = 25$ e $\frac{dy}{dt} = 60$. Denotando por $z(t)$ a distância entre os carros, pelo Teo. de Pitágoras,



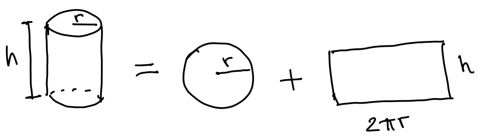
$z^2 = x^2 + y^2$ (I). Queremos determinar $\frac{dz}{dt}$ após 2h de viagem, ou seja, quando $x = 25 \cdot 2 = 50\,km$ e $y = 60 \cdot 2 = 120\,km$. Derivando (I):

$$2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{z}$$

Após 2h da partida:

$$z^2 = 50^2 + 120^2 \Rightarrow z = \sqrt{16900} = 130\ km$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{50 \cdot 25 + 120 \cdot 60}{130} = 65\,km/h$$

2 

Uma lata cilíndrica sem tampa é composta por um disco de raio r na base e uma faixa retangular medindo $2\pi r \times h$.

Indicando por A_1 a área do disco, por A_2 a área do retangulo e por V o volume da lata, temos:

$$A_1 = \pi r^2 \quad , \quad A_2 = 2\pi r h \quad e \quad V = \pi r^2 h$$

Queremos determinar o menor valor de $A = A_1 + A_2$ tal que $V = 1000\ cm^3$:

$$1000 = V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2} \Rightarrow A = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$$

$$\therefore A(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r} \quad , \quad \forall r > 0$$

Calculando os números críticos de $A(r)$:

$$A'(r) = 2\pi r - \frac{2000}{r^2}, \quad \forall r > 0$$

$$\therefore A'(r) = 0 \iff 2\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \iff 2\pi r = \frac{2000}{r^2} \iff 2\pi r^3 = 2000$$

$$\iff r^3 = \frac{1000}{\pi} \iff r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}.$$

Aplicando o teste da 2ª derivada:

$$A''(r) = 2\pi + \frac{4000}{r^3} \Rightarrow A''\left(\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}\right) = 2\pi + \frac{4000}{\frac{1000}{\pi}} = 2\pi + 4\pi = 6\pi > 0$$

Portanto, $A(r)$ tem um mínimo local em $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$. Assim, as dimensões da lata devem ser

$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} \quad e \quad h = \frac{1000}{\pi\left(\frac{1000}{\pi}\right)^{2/3}} = \frac{\frac{1000}{\pi}}{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^{2/3}} = \left(\frac{1000}{\pi}\right)^{1/3} = r$$

3) $f'(x) = x^{-1/3} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} x^{2/3} + c$

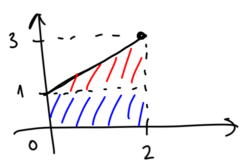
$$\therefore 1 = f(1) = \frac{3}{2} \cdot 1^{2/3} + c \Rightarrow c = 1 - \frac{3}{2} \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

Portanto, $f(x) = \frac{3}{2} x^{2/3} - \frac{1}{2}$.

4) $$\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\, du = \int_1^9 \frac{\sqrt{u}}{u} - \frac{2u^2}{u}\, du = \int_1^9 u^{-1/2} - 2u\, du$$

$$= \int_1^9 u^{-1/2}\, du - 2\int_1^9 u\, du = 2u^{1/2}\Big|_1^9 - u^2\Big|_1^9 = 2 \cdot 9^{1/2} - 2 \cdot 1^{1/2} - 9^2 + 1^2 = -76$$

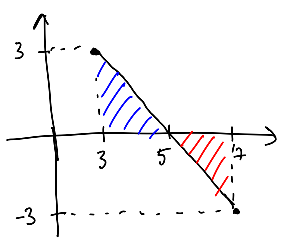
5) a)



$$\int_0^2 f(x)\, dx = \text{área azul} + \text{área vermelha}$$

$$= 2 \cdot 1 + \frac{2 \cdot 2}{2} = 4$$

b)



$$\int_3^7 f(x)\, dx = \text{área azul} - \text{área vermelha}$$

$$= \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2} = 0.$$