1	
2	
3	
4	
5	
Total	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Prof. Adriano Barbosa
Álgebra Linear e Geometria Analítica — Avaliação P1

Matemática 28 de Junho de 2017

Aluno(a): ....

(1) Mostre que se o sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$

tem solução, então as constantes a, b e c devem satisfazer $c = a + b$.

(2) Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $\operatorname{tr}(2C^T)$.
(b) Calcule $\operatorname{tr}(B^{-1}A)$.
(c) Calcule $\operatorname{tr}(2C^T + B^{-1}A)$, se possível. Justifique.

(3) Mostre que, para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) - \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta) & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(4) Determine o valor de n para que o ângulo entre as retas seja $\frac{\pi}{6}$:

$$r_1 : \frac{x-2}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$$

(5) Encontre a equação implícita do plano que contém as retas

$$r_1 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} \frac{x-1}{3} = z - 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Boa Prova!

① $\begin{cases} x + y + 2z = a & ① \\ x \qquad + z = b & ② \\ 2x + y + 3z = c & ③ \end{cases}$

② $\Rightarrow z = b - x$

Substituindo em ① e ③:

$$\begin{cases} x + y + 2(b-x) = a \\ 2x + y + 3(b-x) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2b - 2x = a \\ 2x + y + 3b - 3x = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = a - 2b \\ -x + y = c - 3b \end{cases} \Rightarrow a - 2b = c - 3b \Downarrow \boxed{c = a + b}$$

② a) $tr(2C^T) = 2\,tr(C^T) = 2\,tr(C) = 2(6+1+3) = 20$

b) $B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/8 & 1/4 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow tr(B^{-1}A) = \frac{5}{8} + 1 = \frac{13}{8}$

c) Não é possível calcular, pois as matrizes $2C^T$ e $B^{-1}A$ têm tamanho diferente.

③ $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta - \cos\theta & \operatorname{sen}\theta + \cos\theta & \boxed{1} \end{vmatrix} \overset{\text{cofator}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$

④ Calculando um vetor diretor v_1 de r_1:

Tome A e B pontos de r_1:

$A = (2,0,0) \in r_1$

$B = (6,5,3) \in r_1$

$\Rightarrow v_1 = \vec{AB} = B - A = (4,5,3) \Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}$

Calculando um vetor diretor v_2 de r_2:

Tome C e D pontos de r_2:

$C = (0,5,-2) \in r_2$

$D = (1, n+5, 0) \in r_2$

$\Rightarrow v_2 = \vec{CD} = D - C = (1, n, 2) \Rightarrow \|v_2\| = \sqrt{1+n^2+4} = \sqrt{n^2+5}$

Para que r_1 e r_2 façam ângulo ~~de~~ $\frac{\pi}{6}$, devemos ter:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{4 + 5n + 6}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{n^2+5}} \Rightarrow \frac{5n+10}{\sqrt{50(n^2+5)}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(5n+10)^2}{50(n^2+5)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{25(n+2)^2}{50(n^2+5)} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4(n^2+4n+4) = 6(n^2+5)$$

$$\Rightarrow 4n^2 + 16n + 16 = 6n^2 + 30 \Rightarrow 2n^2 - 16n + 14 = 0 \Rightarrow n^2 - 8n + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{n=1} \text{ ou } \boxed{n=7}$$

⑤ Calculando vetores diretores das retas:

r_1:

$A = (0,-3,2)$

$B = (1,-1,1)$

$v_1 = \vec{AB} = (1,2,-1)$

r_2:

$C = (1,-1,1)$

$D = (4,-1,2)$

$v_2 = (3,0,1)$

v_1 e v_2 são vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente. Dessa forma, podemos tomar $n = v_1 \times v_2$:

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,-4,-6)$$

Portanto, a eq. implícita do plano π será: $2x - 4y - 6z = d$,

onde $d = 2\cdot 1 - 4(-1) - 6\cdot 1 = 0$ (usando B)

$\therefore$ $\boxed{\pi: 2x - 4y - 6z = 0}$

Verificando a resposta em ④:

$n=1$: $v_1 = (4,5,3)$, $v_2 = (1,1,2)$ $\Rightarrow$ $\langle v_1, v_2 \rangle = 4+5+6 = 15$

$\|v_1\| = \sqrt{50}$

$\|v_2\| = \sqrt{6}$

$$\therefore \cos\theta = \frac{15}{\sqrt{300}} = \frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{10\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$n=7$: $v_1 = (4,5,3)$, $v_2 = (1,7,2)$ $\Rightarrow$ $\langle v_1, v_2 \rangle = 4+35+6 = 45$

$\|v_1\| = \sqrt{50}$

$\|v_2\| = \sqrt{54}$

$$\therefore \cos\theta = \frac{45}{\sqrt{2700}} = \frac{45}{30\sqrt{3}} = \frac{45\sqrt{3}}{30\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$