1	
2	
3	
4	
5	
Total	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

Prof. Adriano Barbosa

Álgebra Linear e Geometria Analítica — Avaliação P1

Física 30 de Junho de 2017

Aluno(a): ....

(1) Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$$

(a) Para quais valores de a o sistema não admite solução? Justifique.
(b) Para quais valores de a o sistema admite solução única? Justifique.
(c) Para quais valores de a o sistema admite infinitas soluções? Justifique.

(2) Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $\operatorname{tr}(C^T + C)$.
(b) Calcule $\operatorname{tr}(A^{-1}B)$.
(c) Calcule $\operatorname{tr}(C^T + C + A^{-1}B)$, se possível. Justifique.

(3) Mostre que $x = 0$ e $x = 2$ são solução da equação

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

(4) Dados $A = (3, 4, -2)$ e $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$. Determine a equação paramétrica da reta que passa por A e é perpendicular a r.

(5) Dado o plano $\pi : 3x + y - z = 1$, calcule:
(a) O valor de k para que o ponto $P = (k, 2, k - 1)$ pertença a π.
(b) O valor de k para que o plano $\pi_1 : kx - 4y + 4z = 7$ seja paralelo a π.

Boa Prova!

① Escalonando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 4L_1]{L_2 \to L_2 - 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{bmatrix}$$

Para $a=4$: $4^2-16=0$ e $4-4=0$, logo posto da matriz aumentada é igual ao posto da matriz A, ambos iguais a 2. Como o sistema tem 3 incógnitas, o sistema tem infinitas sol.

Para $a=-4$: posto $(A) = 2 < 3 =$ posto da matriz aumentada
$\therefore$ o sistema não admite sol.

Para $a \neq 4$ e $a \neq -4$: posto $(A) =$ posto da matriz aumentada $=$ número de incógnitas
$\therefore$ o sistema admite sol. única.

② a) $tr(C^T + C) = tr(C^T) + tr(C) = tr(C) + tr(C) = 2\,tr(C) = 2(6+1+3) = \boxed{20}$

b) $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}B = \begin{bmatrix} 4/3 & -1/3 \\ 2/3 & 5/6 \end{bmatrix} \Rightarrow tr(A^{-1}B) = \frac{4}{3} + \frac{5}{6} = \boxed{\frac{13}{6}}$

c) Não é possível calcular, pois as matrizes têm tamanho diferente. Dessa forma a soma não está definida.

③ $0 = \begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} \overset{\text{cofator}}{=} -5 \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5(x^2 - 2x) \Rightarrow -5x(x-2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 2}$

④ $v = (1,-1,2)$ é um vetor diretor de r. Queremos uma direção $u = (x,y,z)$ perpendicular a v, ou seja, $\langle u, v \rangle = 0$:

$$0 = \langle u, v \rangle = x - y + 2z \Rightarrow x = y - 2z \Rightarrow u = (y-2z, y, z)$$

Tomando $y=1$ e $z=0$: $u = (1,1,0)$ é perp. a v.

Portanto, a reta $\boxed{\begin{cases} x = 3+t \\ y = 4+t \\ z = -2 \end{cases}}$ passa por A e é perp. a r.

5 a) $P \in \pi \Leftrightarrow 3 \cdot k + 2 - (k-1) = 1 \Leftrightarrow 2k = -2 \Leftrightarrow \boxed{k = -1}$

b) $n_1 = (k, -4, 4)$ é um vetor normal a π_1. ~~Queremos~~

$n = (3, 1, -1)$ é um vetor normal a π.

Queremos que n_1 seja paralelo a π, ou seja, $n_1 = \alpha n$ para algum $k \in \mathbb{Z}$:

$$(k, -4, 4) = \alpha(3, 1, -1) = (3\alpha, \alpha, -\alpha) \Rightarrow \begin{cases} k = 3\alpha \\ \alpha = -4 \\ -\alpha = 4 \end{cases} \Rightarrow k = 3 \cdot (-4) \Rightarrow \boxed{k = -12}$$