UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

FACET

Lista 02 12/09/2016

(1) A transformação $x = au$, $y = bv$ $(a, b > 0)$ pode ser reescrita como $x/a = u$, $y/b = v$ e, portanto, transforma a região circular

$$u^2 + v^2 \leq 1$$

na região elíptica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Ao efetuar integrações em regiões elípticas, primeiro transformamos esta região em uma circular e depois aplicamos a transformada em coordenadas polares da seguinte maneira:

$$u = r\cos\theta \Rightarrow x/a = u = r\cos\theta \Rightarrow x = ra\cos\theta$$

$$v = r\sin\theta \Rightarrow y/b = v = r\sin\theta \Rightarrow y = rb\sin\theta.$$

Portanto, a mudança a coordenadas polares de uma região elíptica é dada por

$$(x, y) = (ar\cos\theta, br\sin\theta)$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$ e $r \in [0, 1]$.

- Usando esta mudança, calcule a integral $\int\int_R \sqrt{16x^2 + 9y^2} dA$, onde R é a região envolvida pela elipse $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$.

(2) De modo análogo, a transformação $x = au$, $y = bv$, $z = cw$ $(a, b, c > 0)$ pode ser reescrita como $x/a = u$, $y/b = v$,$z/c = w$ e, portanto, transforma a região esférica

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$$

na região elipsoidal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Ao efetuar integrações em regiões elipsoidais, primeiro transformamos esta região em uma esférica e depois aplicamos a transformada em coordenadas esféricas da seguinte maneira:

$$u = \rho\cos\theta\sin\phi \Rightarrow x/a = u = \rho\cos\theta\sin\phi \Rightarrow x = a\rho\cos\theta\sin\phi$$

$$v = \rho\sin\theta\sin\phi \Rightarrow y/b = v = \rho\sin\theta\sin\phi \Rightarrow y = b\rho\cos\theta\sin\phi.$$

$$w = \rho\cos\phi \Rightarrow z/c = w = \rho\cos\phi \Rightarrow z = c\rho\cos\phi.$$

Portanto, a mudança a coordenadas esféricas de uma região elipsoidal é dada por

$$(x, y) = (a\rho \cos\theta \sin\phi, b\rho \cos\theta \sin\phi, c\rho \cos\phi)$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$, $\phi \in [0, \pi]$ $r \in [0, 1]$.

- Usando esta mudança, calcule a integral $\int\int\int_G x^2 dV$, onde G é a região envolvida pelo elipsóide $9x^2 + 4y^2 + z = 36$.

Bons estudos!

Bibliografia:

Stewart, J. - Cálculo Vol II

Flemming, D. - Cálculo B

Howard, A. - Cálculo Vol II

Guidorizzi, H. - Um curso de cálculo Vol 3.