Álgebra Linear
Lista 1 — Matrizes e sistemas lineares

Prof. Adriano Barbosa

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Encontre:

   a. $A+B$ b. AC c. BC d. CD e. DA f. DB g. $-A$ h. $\frac{1}{2}D$

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$. Se $A^T = A$, qual o valor de x?

3. Verdadeiro ou falso?

   a. $(-A)^T = -(A)^T$
   b. $(A+B)^T = B^T + A^T$
   c. Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.
   d. $(k_1A)(k_2B) = (k_1k_2)AB$
   e. $(-A)(-B) = -(AB)$
   f. Se A e B são matrizes simétricas, então $AB = BA$.
   g. Se $AB = 0$, então $BA = 0$.
   h. Se podemos efetuar o produto AA, então A é uma matriz quadrada.

4. Ache x, y, z e w se $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Suponha que $A \neq 0$ e $AB = AC$ onde A, B e C são matrizes tais que a multiplicação seja possível.

   a. $B = C$?
   b. Se existir uma matriz Y, tal que $YA = I$, onde I é a matriz identidade, então $B = C$?

6. Resolva o sistema de equações, escrevendo as matrizes aumentadas, associadas aos novos sistemas

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

7. Reduza as matrizes à forma escalonada

a. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

8. Calcule o posto das matrizes da questão anterior.

9. Determine k, para que o sistema admita solução

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

10. Determinar os valores de a e b de modo que o sistema

$$\begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$$

possua uma única solução. Em seguida resolver o sistema.

11. Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) determinou-se que:

   i. O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C.
   ii. O alimento II tem 2, 3 e 5 unidades respectivamente, das vitaminas A, B e C.
   iii. O alimento III tem 3 unidades de vitaminas A e C, e não contém vitamina B.

   Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C,

   a. Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III, que fornecem a quantidade de vitaminas desejada.
   b. Se o alimento I custa R$ 0,60 por grama e os outros dois custam R$ 0,10, existe uma solução custando exatamente R$ 1,00?

12. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, determine as matrizes $X_{2\times 2}$ e $Y_{2\times 2}$ tais que

$$\begin{cases} 2X - Y = A + B \\ X + Y = A - B \end{cases}$$

13. Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ calcule

a. A_{23} b. $\det(A_{23})$ c. Δ_{23} d. $\det(A)$

14. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   a. $\det(A) + \det(B)$
   b. $\det(A + B)$

15. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Verifique se as colocações abaixo são verdadeiras ou falsas

   a. $\det(AB) = \det(BA)$
   b. $\det(A^T) = \det(A)$
   c. $\det(2A) = 2\det(A)$
   d. $\det(A^2) = (\det(A))^2$
   e. $\det(A_{ij}) < \det(A)$
   f. Se A é uma matriz 3×3, então

$$a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23}$$