Universidade Federal da Grande Dourados
Análise Numérica — Lista 4
Engenharia Mecânica — 2016.2
Prof. Adriano Barbosa

1. Calcule o polinômio interpolador de Lagrange de grau no máximo 1 e 2 para as funções abaixo e $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$ e $x_2 = 0.9$. Utilize o polinômio para aproximar o valor de $f(0.45)$ e calcule o erro absoluto.
   (a) $f(x) = \cos x$
   (b) $f(x) = \sqrt{1+x}$
   (c) $f(x) = \ln(x+1)$
   (d) $f(x) = \tan x$
2. Use o Teorema do erro para as aproximações do exercício anterior. Compare com o erro absoluto calculado.
3. Use o polinômio interpolador de Lagrange de grau 1, 2 e 3 para aproximar cada um dos valores abaixo:
   (a) $f(8.4)$, onde $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$
   (b) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$, onde $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$, $f(0) = 1.10100000$
   (c) $f(0.25)$, onde $f(0.1) = -0.62049958$, $f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$, $f(0.4) = 0.24842440$
   (d) $f(0.9)$, onde $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$
4. Os valores do exercício anterior são das funções abaixo. Use a Teorema do erro para calcular o limitante do erro e compare com os resultados obtidos para os polinômios de grau 1 e 2.
   (a) $f(x) = x \ln x$
   (b) $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$
   (c) $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$
   (d) $f(x) = \sin(e^x - 2)$
5. Seja $P_3(x)$ o polinômio interpolador para o dado $(0,0)$, $(0.5, y)$, $(1,3)$ e $(2,2)$. O coeficiante de x^3 em $P_3(x)$ é 6. Calcule o valor de y.

Ano	1950	1960	1970	1980	1990	2000
População (mil)	151.326	179.323	203.302	226.542	249.633	281.422

6. A tabela abaixo apresenta a população dos Estados Unidos entre os anos 1950 e 2000.

   (a) Use o polinômio interpolador de Lagrange para aproximar os valores da população nos anos 1940, 1975 e 2020.

   (b) Sabemos que a população em 1940 era aproximadamente 132.165.000. Quão precisas são as aproximações do item anterior para os anos de 1975 e 2020. Justifique.

7. O polinômio de Bernstein de grau n para $f \in C[0,1]$ é dado por

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

   onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Esses polinômios são utilizados na prova do Teorema de Aproximação de Weierstrass, pois $\lim_{n\to\infty} B_n(x) = f(x)$, para cada $x \in [0,1]$.

   Calcule $B_3(x)$ para as funções $f(x) = x$ e $f(x) = 1$.

Respostas:
1. (a) $n = 1 : 0.869$, erro$= 0.03145$, $n = 2 : 0.8981$, erro$= 0.00235$
(b) $n = 1 : 1.1987$, erro$= 0.00546$, $n = 2 : 1.2034$, erro$= 7.59 \times 10^{-4}$
(c) $n = 1 : 0.3525$, erro$= 0.01906$, $n = 2 : 0.36829$, erro$= 0.03273$
(d) $n = 1 : 0.5131$, erro$= 0.03005$, $n = 2 : 0.45461$, erro$= 0.02845$
2. (a) 0.03375, 0.00506 (b) 0.08438, 0.001898 (c) 0.03375, 0.01013
(d) 0.06779, 0.15104
3.

a.

n	$x_0, x_1, \ldots, x_n$	$P_n(8.4)$
1	8.3, 8.6	17.87833
2	8.3, 8.6, 8.7	17.87716
3	8.3, 8.6, 8.7, 8.1	17.87714

b.

n	$x_0, x_1, \ldots, x_n$	$P_n(-1/3)$
1	−0.5, −0.25	0.21504167
2	−0.5, −0.25, 0.0	0.16988889
3	−0.5, −0.25, 0.0, −0.75	0.17451852

c.

n	$x_0, x_1, \ldots, x_n$	$P_n(0.25)$
1	0.2, 0.3	−0.13869287
2	0.2, 0.3, 0.4	−0.13259734
3	0.2, 0.3, 0.4, 0.1	−0.13277477

d.

n	$x_0, x_1, \ldots, x_n$	$P_n(0.9)$
1	0.8, 1.0	0.44086280
2	0.8, 1.0, 0.7	0.43841352
3	0.8, 1.0, 0.7, 0.6	0.44198500

4.

a.

n	Actual Error	Error Bound
1	1.180×10^{-3}	1.200×10^{-3}
2	1.367×10^{-5}	1.452×10^{-5}

b.

n	Actual Error	Error Bound
1	4.052×10^{-2}	4.515×10^{-2}
2	4.630×10^{-3}	4.630×10^{-3}

c.

n	Actual Error	Error Bound
1	5.921×10^{-3}	6.097×10^{-3}
2	1.746×10^{-4}	1.813×10^{-4}

d.

n	Actual Error	Error Bound
1	2.730×10^{-3}	1.408×10^{-2}
2	5.179×10^{-3}	9.222×10^{-3}

5. $y = 4.25$
6. $102.396,953,\ 215.042,718,\ 513.442,968$
7. $B_3(x) = x,\ B_3(x) = 1$