Trigonometria III

Exercícios de Funções Trigonométricas I

2° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

Trigonometria III
Exercícios de Funções Trigonométricas I

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Seja $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. O valor de x tal que $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ é:

a) $\dfrac{\pi}{2}$.

b) $\dfrac{\pi}{3}$.

c) $\dfrac{\pi}{4}$.

d) $\dfrac{\pi}{5}$.

e) $\dfrac{\pi}{6}$.

Exercício 2. O valor de $\operatorname{tg} 150^o + 2 \operatorname{sen} 120^o - \cos 330^o$ é:

a) $\sqrt{3}$.

b) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Exercício 3. O valor máximo da função $f(x) = 3 + 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, é:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 4. Seja a função $f(x) = 2 - 3\operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, definida em $[0, 2\pi] - A$. O conjunto A é composto por quantos elementos?

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 5. A diferença entre o maior e o menor valor da função $g(x) = 4 + 2\operatorname{sen}\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, definida em $\mathbb{R}$, é:

a) 2.

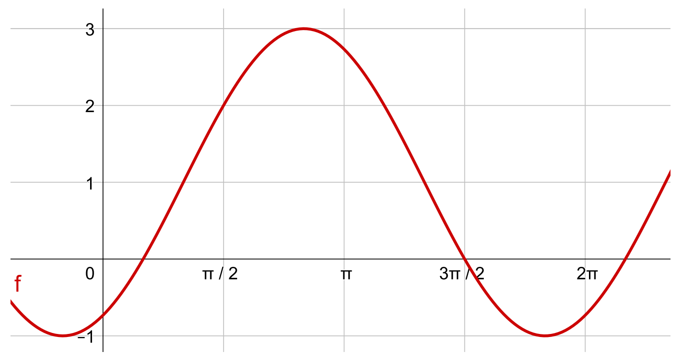
b) 4.

c) 6.

d) 8.

e) 10.

Exercício 6. Observe o gráfico da função $f(x) = a + b\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$. O valor de $a \cdot b$, sendo $\left(\dfrac{\pi}{3}, 1\right)$ um dos pontos do gráfico, é:



a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 7. Seja x um arco tal que $\operatorname{sen} x > 0$ e $\operatorname{tg} x < 0$, então x é um arco de qual quadrante?

a) 1^o.

b) 2^o.

c) 3^o.

d) 4^o.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a \cdot \operatorname{sen}(b(x + c))$, em que os parâmetros a, b e c são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda. Qual(is) é(são) o(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s)?

Exercício 9. O horário do nascer do e do pôr do sol depende de diversos fatores, especialmente da latitude do observador e do dia do ano (posição da Terra ao longo de sua órbita em torno do Sol). No início do verão do Hemisfério Sul, o tempo em horas, T, entre o nascer e o pôr do sol, para latitudes entre zero e 40 graus sul, pode ser calculado aproximadamente, com erro de alguns minutos, pela função $T = 12 + 3,31\,\text{tg}\,\theta$, em que θ é a latitude local. Tendo em vista essas informações, no dia que marca o início do verão, qual é, aproximadamente, a diferença entre o total de horas de Sol na cidade de Porto Alegre, cuja latitude é de 30 graus sul, e na cidade de Macapá, que está sobre a Linha do Equador?

a) 1 hora e 24 minutos.

b) 1 hora e 40 minutos.

c) 1 hora e 54 minutos.

d) 3 hora e 20 minutos.

e) 3 hora e 31 minutos.

Exercício 10. Suponha que uma revista publicou um artigo no qual era estimado que no ano $2015 + x$, com $x \in \{0, 1, 2, ..., 10\}$, o valor arrecadado dos impostos incidentes sobre as exportações em certo país, em milhões de dólares, poderia ser obtido pela função $f(x) = 250 + 12\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$. Caso essa previsão se confirme, então, relativamente ao total arrecadado a cada ano considerado, é correto afirmar que:

a) o valor máximo ocorrerá apenas em 2021.

b) atingirá o valor mínimo apenas em duas ocasiões.

c) poderá superar 300 milhões de dólares.

d) nunca será inferior a 250 milhões de dólares.

Exercício 11. O arco que tem medida x em radianos é tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\text{tg}\,x = -\sqrt{2}$. O valor do $\text{sen}\,x$ é:

a) $\sqrt{3}$.

b) $\sqrt{2}$.

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercício 12. Sendo $f(x) = -4\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\cos x$, o valor de $f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ é:

a) $\sqrt{2}$.

b) 2.

c) $-\sqrt{2}$.

d) -1.

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercício 13. Se $\cos x + \text{sen}\,x = \sqrt{2}$, então $\text{sen}(2x)$ é:

a) -1.

b) 0.

c) 1.

d) 2.

e) 3.

Exercício 14. Se $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $g(x) = 3x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Então o valor da soma $g(2) + g(3) + ... + g(11)$ é:

a) 183.

b) 187.

c) 190.

d) 194.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. A razão entre o maior e o menor número inteiro que pertencem ao conjunto imagem da função trigonométrica $g(x) = -4 + 2\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ é:

a) 2.

b) $\frac{1}{3}$.

c) -3.

d) $-\frac{1}{2}$.

Exercício 16. Cerca de 24,3% da população brasileira é hipertensa, quadro que pode ser agravado pelo consumo excessivo de sal. A variação da pressão sanguínea P (em mmHg) de certo indivíduo é expressa em função do tempo, em segundos, por

$$P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right).$$

Analise as afirmativas:

I) A frequência cardíaca desse indivíduo é de 80 batimentos por minuto.

II) A pressão em $t = 2$ segundos é de 110 mmHg.

III) A amplitude da função $P(t)$ é de 30 mmHg.

Está(ão) correta(s):

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

Exercício 17. A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $p(t) = 10^3 \left(\cos\left(\frac{t-2}{6}\pi\right) + 5\right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que:

a) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.

b) a população atinge seu máximo em $t = 6$.

c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.

d) a população média anual é de 6000 animais.

e) a população atinge seu mínimo em $t = 4$ com 6000 animais.

Exercício 18. Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right)$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia- noite $(0 \leq h \leq 24)$, e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26^o, a mínima 18^o e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã. Quais devem ser os valores de A e B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

a) $A = 18$ e $B = 8$.

b) $A = 22$ e $B = -4$.

c) $A = 22$ e $B = 4$.

d) $A = 26$ e $B = -8$.

e) $A = 26$ e $B = 8$.

Exercício 19. Considerando-se x o menor valor positivo em que a função $g(x) = 20 + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ atinge seu valor máximo y, pode-se afirmar que o valor de $\frac{xy}{\pi}$ é

a) 31.

b) 28.

c) 21.

d) 20.

e) 19.

Exercício 20. Um paciente é monitorado por um aparelho que registra, na tela, uma curva representativa da variação da pressão arterial. Em termos numéricos, a pressão é dada na forma S por D, sendo S o valor máximo atingido quando o coração se contrai e bombeia o sangue e D, o valor mínimo atingido quando o coração está em repouso, sendo que um batimento ocorre no intervalo de tempo entre duas pressões máximas consecutivas. Sabendo-se que a variação da pressão desse paciente foi modelada através da função $P(t) = A + B\cos(Ct)$, em que A, B e C são números reais, constantes, não nulos e que o tempo t é dado em segundos, pode-se afirmar que, se a pressão for de 13 por 7 e o intervalo de tempo de um batimento cardíaco de $0,8$ segundos, ABC será igual a:

a) 54.

b) 105.

c) 75π.

d) 91π.

e) 195π.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1. B.

2.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 150^o + 2\operatorname{sen} 120^o - \cos 330^o &= \\ -\operatorname{tg} 30^o + 2\operatorname{sen} 60^o - \cos 30^o &= \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} &= \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} &= \\ \frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{6} &= \\ \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

Resposta E.

3. O valor máximo da função ocorre quando $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Sendo assim, $f_{max} = 3 + 2\cdot 1 = 5$. Resposta E.

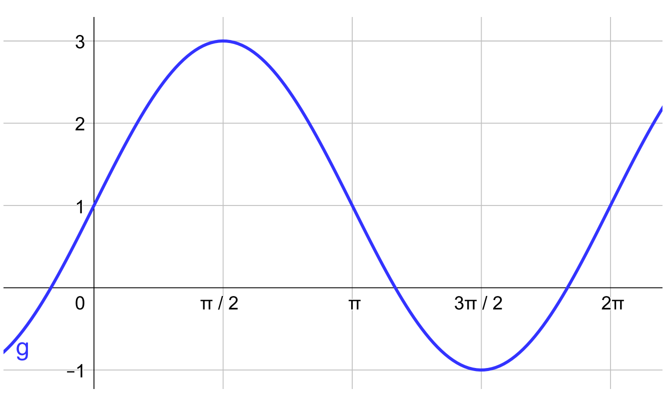
4. Seja $k \in Z$, então:

$$\begin{aligned} 2x - \frac{\pi}{3} &\neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x &\neq \frac{5\pi}{6} + k\pi \\ x &\neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \\ x &\neq \frac{(5+6k)\pi}{12}. \end{aligned}$$

Como $0 \le x \le 2\pi$, então $k = \{0,1,2,3\}$. Resposta D.

5. O maior valor ocorre quando $\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ e o menor quando $\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$. Portanto, $g_{max} - g_{min} = (4 + 2\cdot 1) - (4 - 2\cdot 1) = 4$. Resposta B.

6. Se $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$ é um dos pontos do gráfico, podemos deslocar o gráfico $\frac{\pi}{3}$ para a esquerda e obter o gráfico da função $g(x) = a + b\operatorname{sen} x$:



Analisando o gráfico de $g(x)$, temos $a = 1$ e $b = 2$. Portanto, $a \cdot b = 2$. Resposta B.

7. B.

8. (Extraído do ENEM/Vídeo Aula - Adaptado) $y = a \cdot \operatorname{sen}(b(x + c)) = a \cdot \operatorname{sen}(bx + bc)$. Portanto, o período é $P = \frac{2\pi}{\mid b \mid}$, sendo que para diminuí-lo é necessário aumentar o valor de $\mid b \mid$, ou seja, basta alterar o parâmetro b.

9. (Extraído da UFG-GO)

$$\begin{aligned} \mid T_P - T_M \mid &= \mid (12 + 3,31\operatorname{tg} 30^o) - (12 + 3,31\operatorname{tg} 0^o) \\ &= \mid 3,31(\operatorname{tg} 30^o - \operatorname{tg} 0^o) \mid \\ &= 3,31\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 0\right) \\ &\cong 1,91 \\ &\cong 1h54min. \end{aligned}$$

Resposta C.

10. (Extraído da PUC/SP) B. Valor mínimo ocorre com $\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = -1$. Seja $k \in Z$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3}x &= \pi + 2k\pi \\ \frac{x}{3} &= 1 + 2k \\ x &= 3 + 6k. \end{aligned}$$

Assim, $k = \{0, 1\}$, ou seja, atingirá valor mínimo apenas em duas ocasiões.

11. (Extraído da PUC - MG)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= -\sqrt{2} \\ \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} &= -\sqrt{2} \\ \operatorname{sen} x &= -\sqrt{2}\cos x \\ (\operatorname{sen} x)^2 &= 2(\cos x)^2 \\ (\operatorname{sen} x)^2 &= 2(1 - (\operatorname{sen} x)^2) \\ 3(\operatorname{sen} x)^2 &= 2 \\ \operatorname{sen} x &= \pm\frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Como x é um arco do segundo quadrante, então $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Resposta D.

12. (Extraído da UEPB/Vídeo Aula)

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{7\pi}{4}\right) &= -4\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{4}\right) + 2\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) \\ &= -4\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + 2\cos\left(2\pi - \frac{7\pi}{4}\right) \\ &= -4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Resposta C.

13.

$$\begin{aligned}\cos x+\operatorname{sen} x &= \sqrt{2}\\ (\cos x+\operatorname{sen} x)^2 &= 2\\ (\cos x)^2+2\cos x\operatorname{sen} x+(\operatorname{sen} x)^2 &= 2\\ 1+2\cos x\operatorname{sen} x &= 2\\ \operatorname{sen}(2x) &= 1.\end{aligned}$$

Resposta C.

14. (Extraído da UECE/Vídeo Aula) Analisando os valores de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, com x inteiro variando de 2 a 11, temos $\{0,-1,0,1,0,-1,0,1,0,-1\}$, cuja soma é -1. Como $6+9+12+...+33=\frac{(6+33)\cdot 10}{2}=195$, então $g(2)+g(3)+...+g(11)=-1+195=194$. Resposta D.

15. (Extraído da UERN/Vídeo Aula) Como $Im=[-4-2,-4+2]=[-6,-2]$, então $\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$. Resposta B.

16. (Extraído do UFSM - 2015)

I) $P=\frac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}}=\frac{3}{4}$. Assim, a frequência é $\frac{1}{P}=\frac{4}{3}$ batimentos por segundo, que equivale a $\frac{4}{3}\cdot 60=80$ batimentos por minuto. Item verdadeiro.

II) $P(2)=100-20\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)=100-20\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=110$ mmHg. Item verdadeiro.

III) Como $Im=[100-20,100+20]=[80,120]$, a amplitude de P é $120-80=40$ mmHg. Item falso.

Resposta B.

17. (Extraído da EsPCEx/Vídeo Aula) O período da função é $P=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$, ou seja, no intervalo de 12 meses (um ano), a função completa um ciclo, sendo metade deste ciclo crescente e metade decrescente, ou seja, em um ano o período de chuva corresponde a dois trimestres. Resposta A.

18. (Extraído do ENEM - 2015) Como $Im=[A-\mid B\mid, A+\mid B\mid]$, então temos:

$$\begin{cases} A+\mid B\mid &= 26\\ A-\mid B\mid &= 18.\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $A=22$ e $\mid B\mid=4$. Os valores de máximo e mínimo de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right)$ são -1 e 1, sendo que estes valores ocorrem em $\frac{\pi}{2}+k\pi$, sendo $k\in\mathbb{Z}$. Temos então:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right) &= \frac{\pi}{2}+k\pi\\ h-12 &= 6+12k\\ h &= 18+12k.\end{aligned}$$

Assim, as temperaturas máxima e mínima ocorrem às 6h ($k=-1$) e 18h ($k=0$). Como os funcionários preferem a menor temperatura a tarde, devemos ter temperatura mínima às 18h, sendo que neste horário $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1$, ou seja, B deve ser negativo ($B=-4$). Resposta B.

19. (Extraído da UESB - BA - 2014) A função atinge seu valor máximo quando $\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=1$, ou seja, $y=21$ e, para $k\in\mathbb{Z}$, $x+\frac{2\pi}{3}=2k\pi$, donde x (menor valor) é $2\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$. Portanto, $\frac{xy}{\pi}=\frac{4\pi\cdot 21}{3\pi}=28$. Resposta B.

20. (Extraído da EBMSP - BA - Adaptado) Como B é não nulo, então $Im=[A-B,A+B]$, ou seja:

$$\begin{cases} A-B &= 7\\ A+B &= 13.\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegamos a $A=10$ e $B=3$. Para $t=0$, temos $P(0)=10+3\cdot 1=13$, que é valor máximo e, consequentemente, $0,8$ segundos depois deve ser outro valor máximo, donde concluímos que o período é $\frac{2\pi}{C}=0,8$, segue que $C=\frac{5\pi}{2}$. Portanto $ABC=10\cdot 3\cdot\frac{5\pi}{2}=75\pi$. Resposta C.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Trigonometria III

Exercícios de Funções Trigonométricas II

2° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Trigonometria III
Exercícios de Funções Trigonométricas II

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Seja $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. O valor de x tal que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ é:

a) $\frac{\pi}{6}$.

b) $\frac{\pi}{3}$.

c) $\frac{\pi}{2}$.

d) $\frac{5\pi}{6}$.

e) $\frac{7\pi}{6}$.

Exercício 2. O valor de $\sec 150^o + 2 \operatorname{cossec} 120^o - \operatorname{cotg} 330^o$ é:

a) $\sqrt{3}$.

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$.

e) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Exercício 3. Se o valor mínimo da função $f(x) = 3 + a \operatorname{sen}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ é -1, sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, então o valor de a é:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 4. Seja x um arco do 3^o quadrante. Se $\sec x = -4$, determine o valor de $\operatorname{cotg} x$.

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 5. O valor máximo da função $g(x) = 3 - 2 \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$, definida em $\mathbb{R}$, ocorre para que valores de x?

a) 2.

b) 4.

c) 6.

d) 8.

e) 10.

Exercício 6. Quantas soluções no intervalo $[0, 2\pi]$, a equação $2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$ possui?

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 7. Seja a função $f(x) = 3 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, cujo conjunto domínio é $[0, 2\pi]$. Para que valores de x, $f(x)$ é positiva?

a) 1^o.

b) 2^o.

c) 3^o.

d) 4^o.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a \cdot \operatorname{sen}(b(x + c))$, em que os parâmetros a, b e c são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda. Qual(is) é(são) o(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s)?

Exercício 9. O horário do nascer do e do pôr do sol depende de diversos fatores, especialmente da latitude do observador e do dia do ano (posição da Terra ao longo de sua órbita em torno do Sol). No início do verão do Hemisfério Sul, o tempo em horas, T, entre o nascer e o pôr do sol, para latitudes entre zero e 40 graus sul, pode ser calculado aproximadamente, com erro de alguns minutos, pela função $T = 12 + 3,31 \operatorname{tg} \theta$, em que θ é a latitude local. Tendo em vista essas informações, no dia que marca o início do verão, qual é, aproximadamente, a diferença entre o total de horas de Sol na cidade de Porto Alegre, cuja latitude é de 30 graus sul, e na cidade de Macapá, que está sobre a Linha do Equador?

a) 1 hora e 24 minutos.

b) 1 hora e 40 minutos.

c) 1 hora e 54 minutos.

d) 3 hora e 20 minutos.

e) 3 hora e 31 minutos.

Exercício 10. Suponha que uma revista publicou um artigo no qual era estimado que no ano $2015 + x$, com $x \in \{0, 1, 2, ..., 10\}$, o valor arrecadado dos impostos incidentes sobre as exportações em certo país, em milhões de dólares, poderia ser obtido pela função $f(x) = 250 + 12\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$. Caso essa previsão se confirme, então, relativamente ao total arrecadado a cada ano considerado, é correto afirmar que:

a) o valor máximo ocorrerá apenas em 2021.

b) atingirá o valor mínimo apenas em duas ocasiões.

c) poderá superar 300 milhões de dólares.

d) nunca será inferior a 250 milhões de dólares.

Exercício 11. O arco que tem medida x em radianos é tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\operatorname{tg} x = -\sqrt{2}$. O valor do $\operatorname{sen} x$ é:

a) $\sqrt{3}$.

b) $\sqrt{2}$.

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercício 12. Sendo $f(x) = -4\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\cos x$, o valor de $f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ é:

a) $\sqrt{2}$.

b) 2.

c) $-\sqrt{2}$.

d) -1.

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercício 13. Se $\cos x + \operatorname{sen} x = \sqrt{2}$, então $\operatorname{sen}(2x)$ é:

a) -1.

b) 0.

c) 1.

d) 2.

e) 3.

Exercício 14. Se $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $g(x) = 3x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Então o valor da soma $g(2) + g(3) + ... + g(11)$ é:

a) 183.

b) 187.

c) 190.

d) 194.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. A razão entre o maior e o menor número inteiro que pertencem ao conjunto imagem da função trigonométrica $g(x) = -4 + 2\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ é:

a) 2.

b) $\frac{1}{3}$.

c) -3.

d) $-\frac{1}{2}$.

Exercício 16. Cerca de 24,3% da população brasileira é hipertensa, quadro que pode ser agravado pelo consumo excessivo de sal. A variação da pressão sanguínea P (em mmHg) de certo indivíduo é expressa em função do tempo, em segundos, por

$$P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right).$$

Analise as afirmativas:

I) A frequência cardíaca desse indivíduo é de 80 batimentos por minuto.

II) A pressão em $t = 2$ segundos é de 110 mmHg.

III) A amplitude da função $P(t)$ é de 30 mmHg.

Está(ão) correta(s):

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

Exercício 17. A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $p(t) = 10^3 \left(\cos \left(\dfrac{t-2}{6} \pi \right) + 5 \right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que:

a) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.

b) a população atinge seu máximo em $t = 6$.

c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.

d) a população média anual é de 6000 animais.

e) a população atinge seu mínimo em $t = 4$ com 6000 animais.

Exercício 18. Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B \operatorname{sen} \left(\dfrac{\pi}{12}(h-12) \right)$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia- noite $(0 \leq h \leq 24)$, e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26^o, a mínima 18^o e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã. Quais devem ser os valores de A e B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

a) $A = 18$ e $B = 8$.

b) $A = 22$ e $B = -4$.

c) $A = 22$ e $B = 4$.

d) $A = 26$ e $B = -8$.

e) $A = 26$ e $B = 8$.

Exercício 19. Considerando-se x o menor valor positivo em que a função $g(x) = 20 + \cos \left(x + \dfrac{2\pi}{3} \right)$ atinge seu valor máximo y, pode-se afirmar que o valor de $\dfrac{xy}{\pi}$ é

a) 31.

b) 28.

c) 21.

d) 20.

e) 19.

Exercício 20. Um paciente é monitorado por um aparelho que registra, na tela, uma curva representativa da variação da pressão arterial. Em termos numéricos, a pressão é dada na forma S por D, sendo S o valor máximo atingido quando o coração se contrai e bombeia o sangue e D, o valor mínimo atingido quando o coração está em repouso, sendo que um batimento ocorre no intervalo de tempo entre duas pressões máximas consecutivas. Sabendo-se que a variação da pressão desse paciente foi modelada através da função $P(t) = A + B\cos(Ct)$, em que A, B e C são números reais, constantes, não nulos e que o tempo t é dado em segundos, pode-se afirmar que, se a pressão for de 13 por 7 e o intervalo de tempo de um batimento cardíaco de $0,8$ segundos, ABC será igual a:

a) 54.

b) 105.

c) 75π.

d) 91π.

e) 195π.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1. .

2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 150^o + 2\operatorname{sen} 120^o - \cos 330^o &= \\
-\operatorname{tg} 30^o + 2\operatorname{sen} 60^o - \cos 30^o &= \\
-\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} &= \\
-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} &= \\
\frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{6} &= \\
\frac{\sqrt{3}}{6}.
\end{aligned}$$

Resposta E.

3.

4. Seja $k \in Z$, então:

$$\begin{aligned}
2x - \frac{\pi}{3} &\neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\
2x &\neq \frac{5\pi}{6} + k\pi \\
x &\neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \\
x &\neq \frac{(5+6k)\pi}{12}.
\end{aligned}$$

Como $0 \leq x \leq 2\pi$, então $k = \{0, 1, 2, 3\}$. Resposta D.

5. O maior valor ocorre quando $\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ e o menor quando $\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$. Portanto, $g_{max} - g_{min} = (4 + 2\cdot 1) - (4 - 2\cdot 1) = 4$. Resposta B.

6. Se $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$ é um dos pontos do gráfico, podemos deslocar o gráfico $\frac{\pi}{3}$ para a esquerda e obter o gráfico da função $g(x) = a + b\operatorname{sen} x$: Analisando o gráfico de $g(x)$, temos $a = 1$ e $b = 2$. Portanto, $a \cdot b = 2$. Resposta B.

7. B.

8. (Extraído do ENEM/Vídeo Aula - Adaptado) $y = a \cdot \operatorname{sen}(b(x + c)) = a \cdot \operatorname{sen}(bx + bc)$. Portanto, o período é $P = \frac{2\pi}{\mid b \mid}$, sendo que para diminuí-lo é necessário aumentar o valor de $\mid b \mid$, ou seja, basta alterar o parâmetro b.

9. (Extraído da UFG-GO)

$$\begin{aligned}
\mid T_P - T_M \mid &= \mid (12 + 3,31\operatorname{tg} 30^o) - (12 + 3,31\operatorname{tg} 0^o) \\
&= \mid 3,31(\operatorname{tg} 30^o - \operatorname{tg} 0^o) \mid \\
&= 3,31\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 0\right) \\
&\cong 1,91 \\
&\cong 1h54min.
\end{aligned}$$

Resposta C.

10. (Extraído da PUC/SP) B. Valor mínimo ocorre com $\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = -1$. Seja $k \in Z$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{3}x &= \pi + 2k\pi \\
\frac{x}{3} &= 1 + 2k \\
x &= 3 + 6k.
\end{aligned}$$

Assim, $k = \{0, 1\}$, ou seja, atingirá valor mínimo apenas em duas ocasiões.

11. (Extraído da PUC - MG)

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} x &= -\sqrt{2} \\
\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} &= -\sqrt{2} \\
\operatorname{sen} x &= -\sqrt{2}\cos x \\
(\operatorname{sen} x)^2 &= 2(\cos x)^2 \\
(\operatorname{sen} x)^2 &= 2(1 - (\operatorname{sen} x)^2) \\
3(\operatorname{sen} x)^2 &= 2 \\
\operatorname{sen} x &= \pm\frac{\sqrt{6}}{3}.
\end{aligned}$$

Como x é um arco do segundo quadrante, então $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Resposta D.

12. (Extraído da UEPB/Vídeo Aula)

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{7\pi}{4}\right) &= -4\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{4}\right) + 2\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) \\
&= -4\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + 2\cos\left(2\pi - \frac{7\pi}{4}\right) \\
&= -4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= -4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= -\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Resposta C.

13.

$$\begin{aligned}
\cos x + \operatorname{sen} x &= \sqrt{2} \\
(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 &= 2 \\
(\cos x)^2 + 2\cos x\operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x)^2 &= 2 \\
1 + 2\cos x\operatorname{sen} x &= 2 \\
\operatorname{sen}(2x) &= 1.
\end{aligned}$$

Resposta C.

14. (Extraído da UECE/Vídeo Aula) Analisando os valores de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, com x inteiro variando de 2 a 11, temos $\{0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1\}$, cuja soma é -1. Como $6 + 9 + 12 + ... + 33 = \frac{(6+33)\cdot 10}{2} = 195$, então $g(2) + g(3) + ... + g(11) = -1 + 195 = 194$. Resposta D.

15. (Extraído da UERN/Vídeo Aula) Como $Im = [-4 - 2, -4 + 2] = [-6, -2]$, então $\dfrac{-2}{-6} = \dfrac{1}{3}$. Resposta B.

16. (Extraído do UFSM - 2015)

I) $P = \dfrac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}} = \dfrac{3}{4}$. Assim, a frequência é $\dfrac{1}{P} = \dfrac{4}{3}$ batimentos por segundo, que equivale a $\dfrac{4}{3} \cdot 60 = 80$ batimentos por minuto. Item verdadeiro.

II) $P(2) = 100 - 20\cos\left(\dfrac{16\pi}{3}\right) = 100 - 20 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 110$ mmHg. Item verdadeiro.

III) Como $Im = [100 - 20, 100 + 20] = [80, 120]$, a amplitude de P é $120 - 80 = 40$ mmHg. Item falso.

Resposta B.

17. (Extraído da EsPCEx/Vídeo Aula) O período da função é $P = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$, ou seja, no intervalo de 12 meses (um ano), a função completa um ciclo, sendo metade deste ciclo crescente e metade decrescente, ou seja, em um ano o período de chuva corresponde a dois trimestres. Resposta A.

18. (Extraído do ENEM - 2015) Como $Im = [A - \mid B \mid, A + \mid B \mid]$, então temos:

$$\begin{cases} A + \mid B \mid &= 26 \\ A - \mid B \mid &= 18. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $A = 22$ e $\mid B \mid = 4$. Os valores de máximo e mínimo de sen $\left(\dfrac{\pi}{12}(h - 12)\right)$ são -1 e 1, sendo que estes valores ocorrem em $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$. Temos então:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right) &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ h - 12 &= 6 + 12k \\ h &= 18 + 12k. \end{aligned}$$

Assim, as temperaturas máxima e mínima ocorrem às 6h $(k = -1)$ e 18h $(k = 0)$. Como os funcionários preferem a menor temperatura a tarde, devemos ter temperatura mínima às 18h, sendo que neste horário sen $\dfrac{\pi}{2} = 1$, ou seja, B deve ser negativo $(B = -4)$. Resposta B.

19. (Extraído da UESB - BA - 2014) A função atinge seu valor máximo quando $\cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 1$, ou seja, $y = 21$ e, para $k \in \mathbb{Z}$, $x + \dfrac{2\pi}{3} = 2k\pi$, donde x (menor valor) é $2\pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$. Portanto, $\dfrac{xy}{\pi} = \dfrac{4\pi \cdot 21}{3\pi} = 28$. Resposta B.

20. (Extraído da EBMSP - BA - Adaptado) Como B é não nulo, então $Im = [A - B, A + B]$, ou seja:

$$\begin{cases} A - B &= 7 \\ A + B &= 13. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegamos a $A = 10$ e $B = 3$. Para $t = 0$, temos $P(0) = 10 + 3 \cdot 1 = 13$, que é valor máximo e, consequentemente, $0,8$ segundos depois deve ser outro valor máximo, donde concluímos que o período é $\dfrac{2\pi}{C} = 0,8$, segue que $C = \dfrac{5\pi}{2}$. Portanto $ABC = 10 \cdot 3 \cdot \dfrac{5\pi}{2} = 75\pi$. Resposta C.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com