Função Logarítmica

Função Logarítmica e Propriedades

1° **ano E.M.**

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Função Logarítmica
Função Logarítmica e Propriedades

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o valor dos logaritmos abaixo.

a) $\log_2 4$.

b) $\log_3 27$.

c) $\log_2 \frac{1}{2}$.

d) $\log_5 125$.

e) $\log 10.000$.

Exercício 2. Calcule o valor das expressões abaixo.

a) $\log_2 0,5 + \ln 25$.

b) $\log_4 8 - \log_2 \sqrt{8}$.

c) $\log_{\frac{1}{5}} 25 + \log_7 1$.

Exercício 3. Determine os valores reais de x para os quais é possível determinar:

a) $\log_3 x$.

b) $\log_2(2x - 6)$.

c) $\log(x^2 - 25)$.

Exercício 4. Determine os valores de x para os quais exista:

a) $\log_x(x - 1)$.

b) $\log_{(x^2-4)} 3$.

Exercício 5. Calcule o valor das expressões:

a) $\log 10 + \log_3 3^2$.

b) $\log 6 \cdot \log_6 12 \cdot \log_{12} 10$.

Exercício 6. Determine o valor de x nas equações abaixo.

a) $\log_3 x = \log_3 8$.

b) $\log_4 8^x = \log_4 64$.

c) $\log_5 x \cdot \log_{(x^2-6)} 5 = 1$
.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Se $\log a = 2$, $\log b = 3$ e $\log c = 4$, determine $\log\left(\frac{c^2 \cdot b}{a^4}\right)$.

Exercício 8. Determine $\log 72$, sendo $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$.

Exercício 9. Se $\log 3 = 0,48$, determine $\log 30$.

Exercício 10. Calcule $2^{\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6}$

Exercício 11. Resolva a equação $5^x = 9$, sendo $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$.

Exercício 12. Se o crescimento de uma população é de 20% ao ano, determine em quanto tempo essa população dobrará de tamanho. (Utilize $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$)

Exercício 13. Determine os valores de x na equação:

$$2^{2x} - 7 \cdot 2^x + 12 = 0.$$

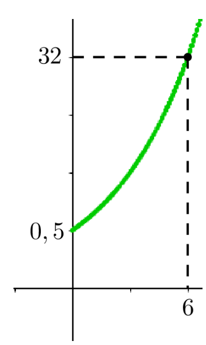
Exercício 14. Em quantos anos $200g$ de uma substância radioativa, que se desintegra a uma taxa de 5% ao ano, se reduzirão a $50g$, sendo $M = M_o \cdot e^{kt}$ a relação em que uma massa M_o demora t anos para atingir a massa M? (Utilize $\log 19 = 1,28$ e $\log 2 = 0,3$)

Exercício 15. Vamos supor que a desvalorização de um determinado modelo de carro seja 20% ao ano, a partir de sua compra. Carlos comprou este modelo, pagando $R\$40.000,00$. Depois de quanto tempo seu valor será $R\$30.000,00$? (Utilize $\log 3 = 0,48$ e $\log 2 = 0,3$)

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Seja uma cultura de bactérias que cresce de forma exponencial em um certo meio. Em determinado momento (tempo inicial) existem 2.000 bactérias e após 30 minutos esse número passou para 4.000. Depois de quanto tempo a quantidade de bactérias será 500.000? (Utilize $\log 2 = 0,3$)

Exercício 17. Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y.



Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantadas, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem $7,5m$ após o plantio. O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a:

a) 3.

b) 4.

c) 6.

d) $\log_2 7$.

e) $\log_2 15$.

Exercício 18. Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3.000^oC e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 minutos. Use $0,477$ como aproximação para $\log_{10} 3$ e $1,041$ como aproximação para $\log_{10} 11$. O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30^oC é mais próximo de:

a) 22.

b) 50.

c) 100.

d) 200.

e) 400.

Exercício 19. Determine todos os valores reais de x que satisfazem à inequação $4^{3x-1} > 3^{4x}$.

Exercício 20. Seja a equação $y^{\log_3 \sqrt{3y}} = y^{\log_3 3y} - 6$, $y > 0$. O produto das raízes reais desta equação é igual a:

a) $\dfrac{1}{3}$.

b) $\dfrac{1}{2}$.

c) $\dfrac{3}{4}$.

d) 2.

e) 3.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1.

a) $\log_2 4 = 2.$

b) $\log_3 27 = 3.$

c) $\log_2 \dfrac{1}{2} = -1.$

d) $\log_5 125 = 3.$

e) $\log 10.000 = 4.$

2.

a) $\log_2 0,5 + \ln 25 = -1 + 25 = 24.$

b) $\log_4 8 - \log_2 \sqrt{8} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} = 0.$

c) $\log_{\frac{1}{5}} 25 + \log_7 1 = -2 + 0 = -2.$

3.

a) $x > 0.$

b) $2x - 6 > 0$, segue que $x > 3$.

c) $x^2 - 25 > 0$, segue que $x < -5$ ou $x > 5$.

4.

a) Pela condição de existência, temos o sistema:
$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x - 1 > 0. \end{cases}$$
Portanto, devemos ter $x > 1$.

b) Pela condição de existência, temos o sistema:
$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 4 \neq 1. \end{cases}$$
Portanto, devemos ter $x < -2$ ou $x > 2$, mas $x \neq \pm\sqrt{5}$.

5.

a) $\log 10 + \log_3 3^2 = 1 + 2 = 3.$

b) $\log 6 \cdot \log_6 12 \cdot \log_{12} 10 = \log 6 \cdot \dfrac{\log 12}{\log 6} \cdot \dfrac{\log 10}{\log 12} = 1.$

6.

a) $x = 8.$

b) $8^x = 64$, segue que $x = 2$.

c)
$$\begin{aligned} \log_5 x \cdot \log_{(x^2-6)} 5 &= 1 \\ \log_5 x &= \frac{1}{\log_{(x^2-6)} 5} \\ \log_5 x &= \log_5(x^2 - 6) \\ x &= x^2 - 6 \\ x^2 - x - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Com isso, encontramos $x_1 = 3$ e $x_2 = -2$, mas, pela condição de existência, $x = 3$, apenas.

7. Seja $y = \log\left(\dfrac{c^2 \cdot b}{a^4}\right)$, então temos:
$$\begin{aligned} y &= \log\left(\frac{c^2 \cdot b}{a^4}\right) \\ &= \log c^2 + \log b - \log a^4 \\ &= 2\log c + \log b - 4\log a \\ &= 2 \cdot 4 + 3 - 4 \cdot 2 \\ &= 3. \end{aligned}$$

8. Vamos chamar $\log 72$ de y. Então temos:
$$\begin{aligned} y &= \log 72 \\ &= \log\left(2^3 \cdot 3^2\right) \\ &= \log 2^3 + \log 3^2 \\ &= 3\log 2 + 2\log 3 \\ &= 3 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,48 \\ &= 0,9 + 0,96 \\ &= 1,86. \end{aligned}$$

9. $\log 30 = \log(3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10 = 0,48 + 1 = 1,48.$

10. Analisando o expoente, temos:
$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{log 4} \cdot \frac{\log 6}{\log 5} = \log_2 6.$$

Portanto, $2^{\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log 45 \cdot \log_5 6} = 2^{\log_2 6} = 6.$

11.
$$\begin{aligned} 5^x &= 9 \\ \log 5^x &= \log 3^2 \\ x \cdot \log 5 &= 2\log 3 \\ x \cdot \log\left(\frac{10}{2}\right) &= 2 \cdot 0,48 \\ x(\log 10 - \log 2) &= 0,96 \\ x(1 - 0,3) &= 0,96 \\ x &= \frac{0,96}{0,7} \\ x &= \frac{48}{35}. \end{aligned}$$

12. Seja P a população em um momento $t=0$, como ela aumenta à taxa de 20% ao ano, então temos:

$$\begin{aligned}
2P &= P\cdot 1,2^t\\
2 &= 1,2^t\\
\log 2 &= \log 1,2^t\\
0,3 &= t\log 1,2^t\\
0,3 &= t\log\frac{12}{10}\\
0,3 &= t(\log 12-\log 10)\\
0,3 &= t(2\log 2+\log 3-1)\\
0,3 &= t(0,6+0,48-1)\\
t &= \frac{0,3}{0,08}\\
t &= 3,75.
\end{aligned}$$

Portanto, a população dobrará de tamanho depois de 3 anos e 9 meses.

13. Fazendo $2^x=y$, temos $y^2-7y+12=0$, segue que $y_1=3$ e $y_2=4$. Assim, temos $2^x=3$, donde $x_1=\log_2 3$, ou $2^x=4$, donde $x_2=2$.

14. Depois de um ano temos $200\cdot 0,95=200\cdot e^k$, segue que $e^k=0,95$. Para uma redução a $50g$, temos:

$$\begin{aligned}
50 &= 200\cdot e^{kt}\\
1 &= 4\cdot\left(e^k\right)^t\\
1 &= 4\cdot(0,95)^t\\
\log 1 &= \log 4+t\log 0,95\\
0 &= 2\log 2+t\log 0,95\\
t &= -\frac{0,6}{\log 95-\log 100}\\
t &= -\frac{0,6}{\log 19+\log 5-2}\\
t &= -\frac{0,6}{1,28+\log\frac{10}{2}-2}\\
t &= -\frac{0,6}{-0,72+\log 10-\log 2}\\
t &= -\frac{0,6}{-0,02}\\
t &= 30.
\end{aligned}$$

Portanto, essa redução ocorrerá após 30 anos.

15. Temos:

$$\begin{aligned}
30.000 &= 40.000\cdot 0,8^t\\
3 &= 4\cdot 0,8^t\\
\log\frac{3}{4} &= t\log 0,8\\
\log 3-\log 4 &= t\log\frac{8}{10}\\
0,48-0,6 &= t(\log 8-\log 10)\\
-0,12 &= t(3\log 2-1)\\
-0,12 &= -0,1t\\
t &= \frac{12}{10}\\
t &= 1,2.
\end{aligned}$$

Portanto, o valor do carro será $R\$30.000,00$ depois de $1,2$ anos.

16. Se essa cultura cresce exponencialmente, temos $f(x)=k\cdot a^x$, sendo x o tempo em horas, k uma constante e f a quantidade de bactérias. Temos, então, $f(0)=k\cdot a^0=2000$, segue que $k=2000$ e $f\left(\frac{1}{2}\right)=2000\cdot a^{\frac{1}{2}}=4000$, donde $a=4$. Dessa forma, para termos 500.000 bactérias, devemos ter:

$$\begin{aligned}
500.000 &= 2.000\cdot 4^t\\
250 &= 4^t\\
\log 250 &= \log 4^t\\
\log(2\cdot 5^3) &= t\log 4\\
\log 2+3\log 5 &= 2t\log 2\\
0,3+3\log\frac{10}{2} &= 0,6t\\
0,3+3(\log 10-\log 2) &= 0,6t\\
0,3+3-0,9 &= 0,6t\\
t &= \frac{2,4}{0,6}\\
t &= 4.
\end{aligned}$$

Portanto, será necessário que tenhamos 4 horas para uma população de 500.000.

17. (Extraído do ENEM - 2016) Para $t=0$, temos $0,5=a^{0-1}$, segue que $a=2$. Para $y=7,5m$, temos:

$$\begin{aligned}
7,5 &= 2^{t-1}\\
\log 7,5 &= (t-1)\log 2\\
t\log 2 &= \log 7,5+\log 2\\
t\log 2 &= \log(7,5\cdot 2)\\
t &= \frac{\log 15}{\log 2}\\
t &= \log_2 15.
\end{aligned}$$

Resposta E.

18. (Extraído do ENEM - 2016) Seja t o tempo em horas de resfriamento. Se a temperatura diminui 1% a cada meia hora, então utilizaremos $2t$ como expoente do fator de atualização. Sendo assim:

$$
\begin{aligned}
30 &= 3000 \cdot 0,99^{2t}\\
10^{-2} &= 0,99^{2t}\\
\log 10^{-2} &= \log 0,99^{2t}\\
-2 &= 2t \log 0,99\\
-2 &= 2t \log \frac{3^2 \cdot 11}{10^2}\\
-2 &= 2t(2\log 3 + \log 11 - 2\log 10)\\
-2 &= 2t(0,954 + 1,041 - 2)\\
t &= \frac{-1}{-0,005}\\
t &= \frac{1000}{5}\\
t &= 200.
\end{aligned}
$$

Resposta D.

19. (Extraído do ITA - 2017)

$$
\begin{aligned}
\log 4^{3x-1} &> \log 3^{4x}\\
(3x-1)\log 4 &> 4x \cdot \log 3\\
6x \cdot \log 2 - 2\log 2 &> 4x \cdot \log 3\\
(6\log 2 - 4\log 3)x &> \log 4\\
(\log 64 - \log 81)x &> \log 4\\
x &< \frac{\log 4}{\log \dfrac{64}{81}}\\
x &< \frac{2\log 2}{2\log \dfrac{8}{9}}\\
x &< \frac{\log 2}{\log \frac{8}{9}}\\
x &< \log_{\frac{8}{9}} 2
\end{aligned}
$$

20. (Extraído do IME - 2017) Como $y > 0$, existe a real tal que $y = 3^a$, segue que $3y = 3^{a+1}$. Reescrevendo a equação, temos:

$$
\begin{aligned}
3^{a\log_3 (3^{(a+1)})^{\frac{1}{2}}} &= 3^{a\log_3 (3^{(a+1)})} - 6\\
3^{\log_3 (3^{(a+1)})^{\frac{a}{2}}} &= 3^{\log_3 (3^{(a+1)})^a} - 6\\
(3^{(a+1)})^{\frac{a}{2}} &= (3^{(a+1)})^a - 6\\
3^{\frac{a^2+a}{2}} &= 3^{a^2+a} - 6.
\end{aligned}
$$

Fazendo $3^{\frac{a^2+a}{2}} = x$, temos $x^2 - x - 6 = 0$, donde $x = -2$ (não convém) ou $x = 3$, que implica em $3^{\frac{a^2+a}{2}} = 3$, segue que $a = -2$ ou $a = 1$ e, consequentemente $y = 3^{-2}$ ou $y = 3$, cujo produto é $\dfrac{1}{3}$. Resposta A.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com