Módulo Função Quadrática

Noções Básicas

9° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

Função Quadrática
Noções Básicas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Os coeficientes de x^2 (a), de x (b) e o termo independente (c) da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 + 4x - 2$, são, respectivamente:

a) -1, -2 e 4.

b) -2, -4 e 2.

c) -1, -1 e 1.

d) -1, 4 e -2.

e) -2, 4 e 2.

Exercício 2. Dada a função quadrática $f(x) = 3x^2 + 5x - 3$, determine:

a) $f(1)$.

b) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) $f(\sqrt{2})$.

Exercício 3. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$ tem como soma das raízes:

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4.

Exercício 4. Qual a coordenada x do vértice da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 - 8x + 5$?

a) -4.

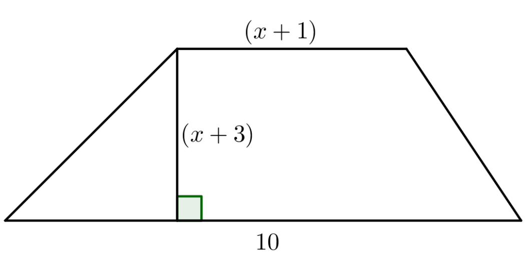
b) -5.

c) 0.

d) 5.

e) 4.

Exercício 5. Na figura, temos um trapézio no qual a altura e uma das bases são valores em função de x. A área desse trapézio pode ser representada por uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Determine:

a) Os valores de a, b e c, desta função.

b) Qual a área do trapézio para $x = 3$.

Exercício 6. Em um campeonato de futebol com x times, cada time jogará com todos os outros duas vezes. Determine:

a) Uma lei de associação que represente o número de jogos f em função de x.

b) O número de jogos para $x = 20$.

Exercício 7. Determine as raízes das seguintes funções quadráticas.

a) $f(x) = x^2 - 4$.

b) $f(x) = x^2 + 3x$.

c) $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

Exercício 8. Para que valor de x, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 + 6x - 1$, atinge seu valor máximo?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Utilize uma função quadrática para relacionar o número de diagonais f de um polígono e o número x de lados.

Exercício 10. João, em uma viagem percorreu $200km$ em um certo tempo. Para percorrer essa distância em uma hora a menos, a velocidade deveria ser de $10km/h$ a mais. Qual a velocidade do trem?

Exercício 11. Mário possui 18 anos e Augusto 15. Daqui a quantos anos o produto de suas idades será igual a 378?

Exercício 12. A trajetória da bola, em um chute a gol, descreve uma trajetória parabólica. Supondo que sua altura h, em metros, t segundos após o chute, seja dada por $h = -t^2 + 6t$, determine:

a) O instante no qual a bola atinge a altura máxima.

b) Essa altura máxima.

Exercício 13. Uma empresa de excursão disponibilizou uma viagem para 100 pessoas de um grupo, ao preço de $R\$200,00$ por pessoa, se todos aderissem à viagem, mas para cada pessoa que desistisse seria acrescido $R\$4,00$ para cada um que fosse.

a) Expresse o valor f arrecadado pela empresa em função da quantidade x de pessoas que aderiram.

b) Determine o valor máximo que a empresa pode arrecadar.

Exercício 14. Uma bola, lançada verticalmente para cima, a partir do solo, tem sua altura h (em metros) expressa em função do tempo t (em segundos), decorrido após o lançamento, pela lei $h(t) = 20t - 5t^2$. Determine:

a) A altura em que a bola se encontra $1s$ após o lançamento.

b) Depois de quanto tempo a bola estará a $8,75m$ do solo.

c) A altura máxima que a bola atinge.

Exercício 15. A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir de seu desligamento $(t = 0)$ e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39^o. Qual o tempo mínimo de espera após se desligar o forno para que a porta possa ser aberta?

Exercício 16. A empresa SKY transporta 2400 passageiros por mês da cidade de Acrolândia a Bienvenuto. A passagem custa 20 reias e a empresa deseja aumentar seu preço. No entanto, o departamento de pesquisa estima que a cada 1 real de aumento no preço da passagem, 20 passageiros deixarão de viajar pela empresa. Neste caso, qual é o preço da passagem, em reais, que vai maximizar o faturamento da SKY?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 17. Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal de produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Qual é o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo?

Exercício 18. Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia. A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no:

a) 19^o dia.

b) 20^o dia.

c) 29^o dia.

d) 30^o dia.

e) 60^o dia.

Exercício 19. Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola: $y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros. Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

a) 18.

b) 20.

c) 36.

d) 45.

e) 54.

Exercício 20. Mostre que se dois números positivos têm soma constante, então seu produto é máximo quando eles são iguais.

Respostas e Soluções.

1. D.

2.

a) $f(1) = 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 3 = 5.$

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{3}{4} + \frac{5}{2} - 3 = \frac{1}{4}.$

c) $f(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 + 5\sqrt{2} - 3 = 6 + 5\sqrt{2} - 3 = 3 + 5\sqrt{2}.$

3. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4.$ Resposta E.

4. $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2(-1)} = -4.$ Resposta A.

5.

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(10 + x + 1)(x + 3)}{2} \\ &= (x + 11)(x + 3) \\ &= x^2 + 3x + 11x + 33 \\ &= x^2 + 14x + 33. \end{aligned}$$

Portanto, $a = 1$, $b = 14$ e $c = 33$.

b) $f(3) = 3^2 + 14 \cdot 3 + 33 = 84.$

6.

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x + 1) \\ &= x^2 + x. \end{aligned}$$

.

b) $f(20) = 20^2 + 20 = 420.$

7.

a)

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{4} \\ x &= \pm 2. \end{aligned}$$

Portanto, $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$.

b)

$$\begin{aligned} x^2 + 3x &= 0 \\ x(x + 3) &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $x = 0$ ou $x + 3 = 0$, segue que $x_1 = 0$ e $x_2 = -3$.

c)

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 3}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $x_1 = 4$ e $x_2 = 1$.

8. O valor de máximo de uma função quadrática, cujo gráfico possui concavidade para baixo, ocorre no vértice. Sendo assim, temos $x_v = -\frac{6}{2(-1)} = 3$.

9. Sabendo que: de cada vértice partem $(x - 3)$ diagonais, já que os segmentos que ligam este vértice aos seus vizinhos são lados e não existe diagonal ligando um vértice a ele mesmo; que o total de vértices é x, pois é mesma quantidade do número de lados; e que fazendo o produto desses dois valores contaremos todas as diagonais duas vezes, já que cada diagonal liga dois vértices, temos $f(x) = \frac{x(x+3)}{2}$, segue que $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$.

10. (Extraído da Vídeo Aula) Supondo que a velocidade do trem seja v e os $200km$ foram percorridos em t horas, então $v = \frac{200}{t}$, segue que $vt = 200$. Para percorrer essa distância em uma hora a menos, seu tempo seria $(t - 1)$ e sua velocidade, $(v + 10)$, ou seja:

$$\begin{aligned} v + 10 &= \frac{200}{t - 1} \\ (v + 10)(t - 1) &= 200 \\ vt - v + 10t - 10 &= 200 \\ 200 - v + 10t - 10 &= 200 \\ 10t - v - 10 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando esta equação por t, temos:

$$\begin{aligned} 10t^2 - vt - 10t &= 0 \\ 10t^2 - 10t - 200 &= 0 \\ t^2 - t - 20 &= 0 \\ t &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} \\ &= \frac{1 \pm 9}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $t = 5h$ e, consequentemente, $v = \frac{200}{5} = 40km/h$.

11. Daqui a x anos, o produto das idades será $(18 + x)(15 +$

x). Temos, então:

$$\begin{aligned}(18+x)(15+x) &= 378\\ 270+18x+15x+x^2 &= 378\\ x^2+33x-108 &= 0\\ x &= \frac{-33\pm\sqrt{1089+432}}{2}\\ &= \frac{-33\pm 39}{2}\end{aligned}$$

Como só nos interessa o valor positivo de x, temos que o produto das idades de Mário e Augusto será 378 daqui a $\dfrac{-33+39}{2}=3$ anos.

12.

a) A bola atinge a altura máxima no vértice da parábola que representa a função h, ou seja, $t_v=-\dfrac{6}{2(-1)}=3$ segundos após o chute.

b) $h_{max}=-3^2+6\cdot 3=9m$.

13.

a) Cada uma das x pessoas que aderirem deve pagar 200 reais mais 4 reais por pessoa que não viajarão, ou seja, $4(100-x)$. Portanto, o total f arrecadado pela empresa é $f(x)=x(200+4(100-x))=x(600-4x)=-4x^2+600x$.

b) Como se trata de uma função quadrática, o valor máximo arrecadado é a coordenada y do vértice da parábola, ou seja, $f_{max}=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=-\dfrac{360000-4\cdot(-4)\cdot 0}{4\cdot(-4)}=$ 22.500 reais.

]

14.

a) $h(1)=20\cdot 1-5\cdot 1^2=15m$.

b)

$$\begin{aligned}-5t^2+20t &= 8,75\\ -5t^2+20t-8,75 &= 0\\ -20t^2+80t-35 &= 0\\ -4t^2+16t-7 &= 0\\ t &= \frac{-16\pm\sqrt{256-112}}{-8}\\ &= \frac{-16\pm 12}{-8}\\ &= \frac{4\pm 3}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, a bola estará a $8,75m$ do solo em dois momentos: $0,5$ e $3,5$ segundos após o lançamento.

c) A altura máxima é a coordenada y do vértice da parábola, ou seja:

$$\begin{aligned}h_{max} &= -\frac{b^2-4ac}{4a}\\ &= -\frac{400-4\cdot(-5)\cdot 0}{4\cdot(-5)}\\ &= -\frac{400}{-20}\\ &= 20.\end{aligned}$$

Portanto, a altura máxima que a bola atinge é $20m$.

15. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\begin{aligned}-\frac{t^2}{4}+400 &= 39\\ \frac{t^2}{4} &= 361\\ t^2 &= 4\cdot 361\\ t &= \pm\sqrt{4\cdot 361}\\ &= \pm 38.\end{aligned}$$

Portanto, o tempo mínimo de espera é de 38 minutos, após o desligamento do forno, para abertura da porta.

16. (Extraído da Vídeo Aula) Supondo que o aumento da passagem seja x, temos que o total arrecadado f pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}f(x) &= (2400-20x)(20+x)\\ &= 48000+2400x-400x-20x^2\\ &= -20x^2+2000x+48000.\end{aligned}$$

Como queremos o preço da passagem para faturamento máximo, temos $x_v=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2000}{-40}=50$, ou seja, a passagem deverá custar $20+50=70$ reais.

17. (Extraído da Vídeo Aula) Obtemos o lucro L, fazendo $V-C$, ou seja, $L(x)=-2x^2+28x+40$. Como queremos o número de lotes para lucro máximo, temos $x_v=-\dfrac{-28}{2\cdot(-2)}=7$. Portanto, devem ser vendidos 7 lotes.

18. (Extraído do ENEM - 2016) Temos:

$$\begin{aligned}-2t^2+120t &= 1600\\ t^2-60t+800 &= 0\\ t &= \frac{60\pm\sqrt{3600-3200}}{2}\\ &= \frac{60\pm 20}{2}\\ &= 30\pm 10.\end{aligned}$$

Temos dois valores, 20 e 40. Porém, como a segunda dedetização deve ocorrer quando a quantidade chegar a 1600, deve ocorrer logo no 20^o dia. Resposta B.

19. (Extraído do ENEM - 2016) Fazendo $9 - x^2 = 0$, encontramos $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$, segue que a largura do túnel é $3 - (-3) = 6m$. A altura do túnel é a medida da ordenada do vértice, ou seja, $y_v = -\dfrac{0 - 4 \cdot (-1) \cdot 9}{4 \cdot (-1)} = 9m$. Assim, a área da parte frontal da tampa de concreto é $\dfrac{2}{3} \cdot (6 \cdot 9) = 36m^2$. Resposta C.

20. (Extraído da Vídeo Aula) Sejam dois números positivos x e y e sua soma constante $k = x + y$, donde $y = k - x$. Seu produto é $P = xy = x(k - x) = -x^2 + kx$, cujo valor máximo ocorre em $x_v = -\dfrac{k}{-2} = \dfrac{k}{2}$ e, sendo assim, $y = \dfrac{k}{2}$, ou seja, quando $x = y$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Módulo de Função Quadrática

Noções Básicas: Definição, Máximos e Mínimos

1^a **série E.M.**

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

Função Quadrática
Noções Básicas: Definição, Máximos e Mínimos

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Em cada um dos itens abaixo classifique o grau do polinômio associado à respectiva função:

a) $y = 2x + 4$

b) $y = x^2 + 5$

c) $y = x^3 + x^4 + 2x^2 + 3x - 2$

d) $y = -3x^2 - 7x + 6$

e) $y = -2x - 1$

Exercício 2. Analise as alternativas e identifique os coeficientes a, b e c no estrutura $y = ax^2 + bx + c$ das funções abaixo:

a) $y = 2x^2 + 4x - 3$

b) $y = -3x^2 + x + 5$

c) $y = x^2 - 9$

d) $y = x^2 + 7x$

Exercício 3. Nas funções quadráticas há um discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Calculo o discriminante das funções abaixo:

a) $y = x^2 - 6x + 5$

b) $y = -2x^2 + 9x - 7$

c) $y = x^2 + 1$

d) $y = x^2 - 3x$

Exercício 4. Em cada um dos itens abaixo, determine, a partir do discriminante, quantos zeros terá a função:

a) $y = x^2 - 8x + 7$

b) $y = -3x^2 + 5x - 2$

c) $y = x^2 + 4$

d) $y = -x^2 + 6x - 9$

e) $y = x^2 - x + 10$

Exercício 5. Em cada um dos itens abaixo, determine se o ponto do vértice é de máximo ou mínimo:

a) $y = x^2 + x$

b) $y = -5x^2 + x + 4$

c) $y = 4x^2 - 9$

d) $y = -x^2 + 4x - 4$

Exercício 6. Calcule as coordenadas do vértice de cada função do item anterior.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. O lucro L de uma microempresa, em função do número de funcionários n que nela trabalham, é dado, em milhares de reais, pela fórmula $L(n) = 36n - n^2$. Com base nessas informações, qual o número de trabalhados ideal para que o lucro dessa microempresa seja máximo?

Exercício 8. Determine β na função real

$$y = \frac{x^2}{2} - 3x + \beta$$

para que o valor mínimo seja $-\dfrac{1}{2}$.

Exercício 9. O gráfico da função quadrática $y = x^2 - mx + (m - 1)$, com $m \in \mathbb{R}$, tem um único ponto comum com o eixo das abscissas. Sendo assim, qual o valor de y que essa função associa a $x = 2$?

Exercício 10. A parábola que representa graficamente a função

$$y = -2x^2 + bx + c$$

passa pelo ponto $(1, 0)$ e seu vértice é o ponto $(3, k)$. Qual o valor de k?

Exercício 11. Uma função do quadrática ($y = ax^2 + b + c$)tem o eixo do y como eixo de simetria. A distância entre os zeros da função é de 4 unidades e o valor mínimo da função é -5. Qual o valor de a nessa função?

Exercício 12. Um corpo lançado a partir do solo descreve uma parábola de equação $y = 100x - 2x^2$, sendo y e x, em metros, as distâncias vertical e horizontal em cada instante.

a) Qual a altura máxima que esse corpo atingiu?

b) A que distância do local de lançamento o corpo caiu?

Exercício 13. Um comerciante avaliou que, para uma certa mercadoria, o número n de unidades vendidas diariamente podia ser calculado pela expressão $n = 100 - 2x$, onde x é o preço de venda por unidade. Sabendo-se que cada unidade teve um custo de 10 reais, qual o preço de venda (x) que garante o maior lucro?

Exercício 14. Karla é aluna do 1° ano do Ensino Médio e está estudando função quadrática. Ela chegou em casa com uma dúvida sobre uma questão que o professor de matemática colocou no quadro. O pai dela prontificou-se em ajudá-la. O enunciado do problema era: "Dentre todos os retângulos de perímetro igual a 24 cm qual é o de maior área?" . Após a ajuda de seu pai, qual o lado, em centímetros, do quadrilátero encontrado por ela?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Se a função real de variável real, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, é tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 5$ e $f(3) = 4$, então qual o valor de $f(4)$?

Exercício 16. Se o ponto $(k, 9)$ representa o vértice da parábola determinada pela função quadrática $y = 6x^2 + bx + 15$, então qual o valor da incógnita b?

Exercício 17. A equação da trajetória parabólica do salto de uma pulga é dado por $f(x) = -x^2 + 4x$. Essa pulga salta no ponto de origem do sistema de coordenadas cartesianas. Qual é a altura máxima atingida pela pulga?

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1.

a) 1° grau.

b) 2° grau.

c) 4° grau.

d) 2° grau.

e) 1° grau.

2.

a) $a = 2$, $b = 4$ e $c = -3$.

b) $a = -3$, $b = 1$ e $c = 5$.

c) $a = 1$, $b = 0$ e $c = -9$.

d) $a = 1$, $b = 7$ e $c = 0$.

3.

a) $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$.

b) $\Delta = (9)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-7) = 81 - 56 = 25$.

c) $\Delta = (0)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4$.

d) $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 9$.

4.

a) $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36 > 0$, assim a função possui dois zeros reais e distintos.

b) $\Delta = (5)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-2) = 25 - 24 = 1 > 0$, assim a função possui dois zeros reais e distintos.

c) $\Delta = (0)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16 < 0$, assim a função não dois zeros reais.

d) $\Delta = (6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 36 - 36 = 0$, assim a função possui dois zeros reais e iguais (ou apenas um zero real).

e) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 1 - 40 = -39 < 0$, assim a função não possui zeros reais.

5.

a) Como $a = 1 > 0$, então temos ponto de mínimo.

b) Como $a = -5 < 0$, então temos ponto de máximo.

c) Como $a = 4 > 0$, então temos ponto de mínimo.

d) Como $a = -1 < 0$, então temos ponto de máximo.

6. Temos que $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

a) Assim, $x_V = -\dfrac{1}{2}$ e $y_V = -\left(\dfrac{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

b) Assim, podemos escrever $x_V = -\dfrac{1}{2 \cdot (-5)} = \dfrac{1}{10}$ e $y_V = -\left(\dfrac{1^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 4}{4 \cdot (-5)}\right) = \dfrac{81}{20}$.

c) Daí, ficamos com $x_V = -\dfrac{0}{2 \cdot 4} = 0$ e $y_V = -\left(\dfrac{0^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9)}{4 \cdot 4}\right) = -9$.

d) Por fim, chegamos a $x_V = -\dfrac{4}{2 \cdot (-1)} = 2$ e $y_V = -\left(\dfrac{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}{4 \cdot (-1)}\right) = 0$.

7. Temos que $a = -3$, $b = 36$, $c = 0$ e o n representa o número de funcionários. Assim, o problema pede para calcularmos o n_V, a coordenada n do vértice. Sendo assim, podemos fazer $n_V = -\dfrac{36}{2 \cdot (-3)} = 6$ funcionários.

8. O valor mínimo da função é o y_V. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} y_v &= -\frac{\Delta}{4a} \\ -\frac{1}{2} &= -\frac{(-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \beta}{4 \cdot \frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} &= \frac{9 - 2\beta}{2} \\ 1 &= 9 - 2\beta \\ \beta &= 4. \end{aligned}$$

9. Como a função tangencia o eixo x, temos que $\Delta = 0$ e podemos escrever

$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 1) &= 0 \\ m^2 - 4m + 4 &= 0 \\ (m - 2)^2 &= 0 \\ m &= 2. \end{aligned}$$

Portanto, chegamos a $y = x^2 - 2x + 1$ e fazendo $x = 2$ acabamos com $y = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$.

10. Como a função passa pelo ponto $(1, 0)$, podemos fazer

$$\begin{aligned} 0 &= -2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ b + c &= 2. \end{aligned}$$

Temos $x_V = 3$, então

$$\begin{aligned} -\frac{b}{2a} &= 3 \\ -\frac{b}{2 \cdot (-2)} &= 3 \\ \frac{b}{4} &= 3 \\ b &= 12. \end{aligned}$$

O que conclui $c = -10$ e o

$$\begin{aligned} y_v &= k \\ k &= -\frac{\Delta}{4a} \\ k &= -\frac{12^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-10)}{4 \cdot (-2)} \\ k &= 8. \end{aligned}$$

11. Toda função quadrática pode ser fatorada como

$$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

com x_1 e x_2 zeros da função. Como o eixo de simetria (x_V) está sobre o eixo y, podemos concluir que $x_V = 0$, ou melhor, $-\dfrac{b}{2a} = 0$, com $b = 0$, o que conclui $x_1 + x_2 = 0$. Além disso, como a distância entre as raízes é 4, podemos escrever $x_2 - x_1 = 4$ (supondo $x_2 > x_1$). Daí, vamos para

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 - x_1 &= 4, \end{aligned}$$

assim, $x_2 = 2$ e $x_1 = -2$. Por fim, como o valor mínimo é -5, ou seja $y_V = -5$, o par ordenado $(0, -5)$ pertence ao gráfico da função (é seu vértice) o que permite escrevermos

$$\begin{aligned} y &= a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\ y &= a \cdot (x - (-2)) \cdot (x - 2) \\ y &= a \cdot (x + -2) \cdot (x - 2) \\ -5 &= a \cdot (0 + -2) \cdot (0 - 2) \\ a &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

12. Na função $y = 100x - 2x^2$ temos $a = -2$, $b = 100$, $c = 0$ e $\Delta = 100^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0 = 10000$.

a) Ficamos com $y_V = -\dfrac{10000}{4 \cdot (-2)} = 1250$ m.

b) Para a distância horizontal percorrida, vamos ter que calcular os zeros da função (e a distância entre eles). Sendo assim, façamos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-100 \pm 100}{-4} \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 50. \end{aligned}$$

Por fim, a distância do local de lançamento ($x_1 = 0$) é igual a 50 metros.

13. (Adaptado do vestibular da ESPM SP − 2015) Temos que o lucro L é a diferença do receita R com o custo C (com o intuito que fique positivo, e assim gerar lucro). Daí, podemos escrever que a receita é o produto do preço x pela quantidade n de unidade vendidas ($R = x \cdot n$) e o custo é o produto de valor de produção unitário (10 reais) pela quantidade produzida. Donde podemos estabelecer a função lucro como

$$\begin{aligned} L &= R - C \\ L &= x \cdot n - 10 \cdot n \\ L &= x \cdot (100 - 2x) - 10 \cdot (100 - 2x) \\ L &= (100 - 2x) \cdot (x - 10), \end{aligned}$$

aqui podemos determinar que $x_1 = 50$ e $x_2 = 10$ e o $x_V = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 30$ reais.

14. (Adaptado do vestibular da IFPE − 2015) Sendo x e y as medidas dos lados do retângulo, então $x + y = 12$ e a área S fica $S = xy$. Daí, podemos fazer $y = 12 - x$ e substituir na área ficando com

$$S = x \cdot (12 - x) = 12x - x^2.$$

Agora, o lado que garante a maior área fica igual a

$$\begin{aligned} x_V &= -\frac{b}{2a} \\ x_V &= -\frac{12}{2 \cdot (-1)} \\ x_V &= 6, \end{aligned}$$

e o quadrilátero de maior área é um quadrado de lado 6 cm, cuja área é 36 cm^2.

15. (Adaptado do vestibular da UECE − 2015)
Fazendo as devidas substituições teremos que

$$
\begin{aligned}
a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 &\Leftrightarrow a + b + c = 2 \qquad (1)\\
a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 5 &\Leftrightarrow 4a + 2b + c = 5 \qquad (2)\\
a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 4 &\Leftrightarrow 9a + 3b + c = 4. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Ao proceder com as subtrações $(2) - (1)$ e $(3) - (1)$ ficaremos com

$$
\begin{aligned}
3a + b &= 3\\
8a + 2b &= 2,
\end{aligned}
$$

sistema que resulta em $a = -2$, $b = 9$ e $c = -5$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
f(4) &= -2 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 - 5\\
f(4) &= -32 + 36 - 5 = -1.
\end{aligned}
$$

16. (Adaptado do vestibular da UERN − 2015)
Do enunciado tiramos que $y_V = 9$. Sendo assim, ficamos com

$$
\begin{aligned}
y_V &= 9\\
-\frac{b^2 - 4 \cdot 6 \cdot 15}{4 \cdot 6} &= 9\\
\frac{b^2 - 4 \cdot 6 \cdot 15}{4 \cdot 6} &= -9\\
b^2 &= -9 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 15\\
b^2 &= 4 \cdot 6 \cdot 6\\
b &= 12.
\end{aligned}
$$

17. (Adaptado do vestibular da Unievangélica GO − 2015)
A altura máxima é dada pela fórmula da ordenada do vértice, $y_V = -\dfrac{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)} = 4$ unidades de comprimento.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Módulo de Função Quadrática

Gráfico de uma Função Quadrática

1^a **série E.M.**

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Função Quadrática
Gráfico de uma Função Quadrática

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine a concavidade da parábola e o número de zeros reais de cada uma das funções abaixo.

a) $y = x^2 - 10x + 21$.

b) $y = -x^2 + 8x - 12$.

c) $y = x^2 + 18x + 81$.

Exercício 2. Determine as raízes, o vértice e o pontos de interseção com eixo das ordenadas das seguintes funções

a) $y = x^2 - 5x + 4$

b) $y = -x^2 - 6x + 16$

c) $y = x^2 + 4x$

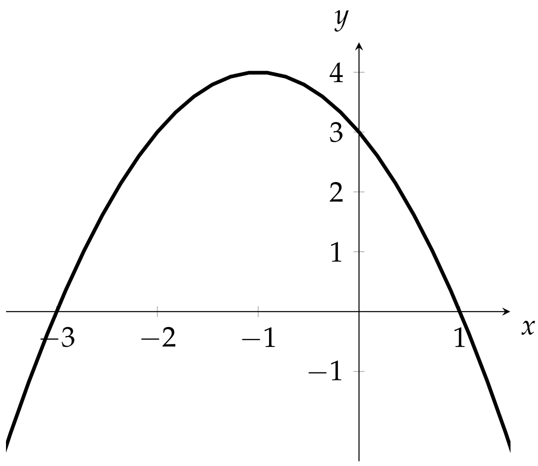
d) $y = -x^2 + 9$

e) $y = x^2 - 6x + 9$

Exercício 3. Analise os gráficos do exercício anterior e determine os respectivos eixos de simetria em cada parábola.

Exercício 4. Esboce um gráfico e determine uma função que tenha eixo de simetria igual $x = 2$, valor máximo igual a 9 e que uma de suas raízes seja igual a 5.

Exercício 5. Observe o gráfico abaixo de uma parábola e conclua a sua respectiva lei da função.



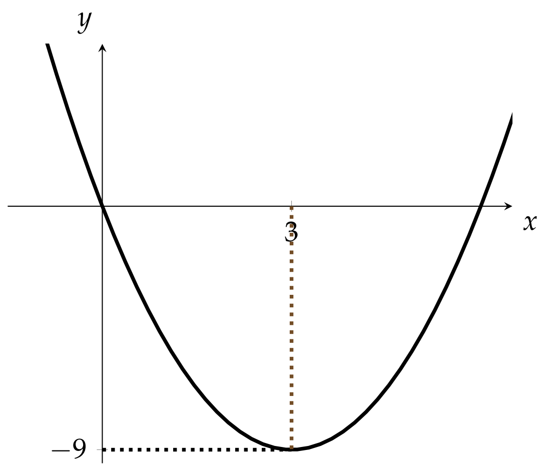
Exercício 6. Qual a o conjunto imagem da função

$$y = x^2 - 10x + 21?$$

Exercício 7. A função $y = kx^2 - 8x + k$ tem como conjunto imagem $]-\infty; 0]$, qual o valor de k?

2 Exercícios de Fixação

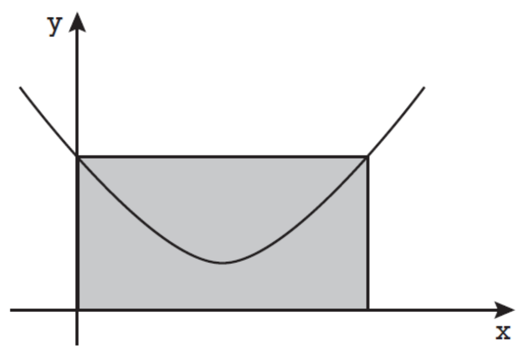
Exercício 8. Observe o gráfico abaixo cujo ponto destacado é o vértice da função. Qual a lei que representa essa função?



Exercício 9. Todos os elementos do domínio da função $y = (m+1)x^2 - 2(m-2)x + m$ têm imagens positivas. Sendo assim, qual o menor valor inteiro que m pode assumir?

Exercício 10. Esboce um gráfico e determine uma lei para uma função que tenha eixo de simetria a reta $x = 4$, suas raízes distem 10 unidades entre si e a intersecção com o eixo y seja no ponto $(0, -18)$.

Exercício 11. A parábola da figura abaixo representa o gráfico da função $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Qual o valor da área do retângulo sombreado abaixo?



Exercício 12. Determine o conjunto imagem em cada função abaixo observando o domínio definido.

a) $y = x^2 - 4x + 3$ com $D_f = \mathbb{R}$.

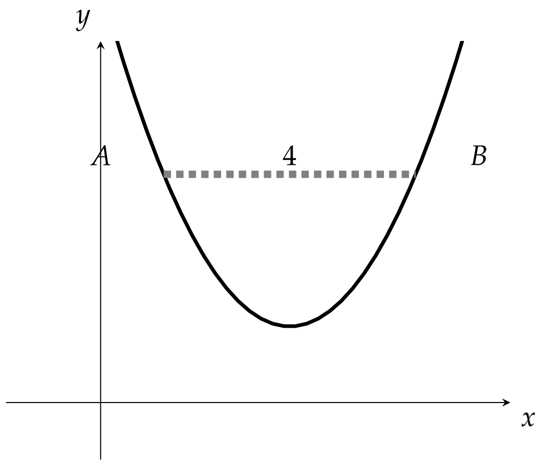
b) $y = -x^2 + 9x - 14$ com $D_f = \mathbb{R}$.

c) $y = x^2 + 9x$ com $D_f = [-9, 0]$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

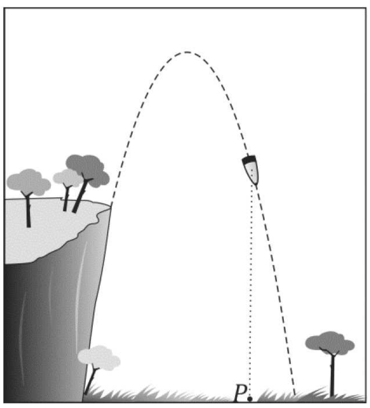
Exercício 13. Seja $f : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real tal que $f(x) = (x-1)(x-3)$. Qual o conjunto imagem dessa função?

Exercício 14. Na figura abaixo temos o gráfico de $f(x) = x^2 - 6x + 11$. Os pontos A e B estão nesse gráfico e o segmento horizontal AB tem comprimento 4. Qual é a distância de AB ao eixo das abscissas?



Exercício 15. Se a função real de variável real, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, é tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 5$ e $f(3) = 4$, então qual o valor de $f(4)$?

Exercício 16. A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?



Respostas e Soluções.

1. A concavidade da parábola é determinada pelo sinal de a e o número de raízes reais pelo sinal do Δ, sendo assim:

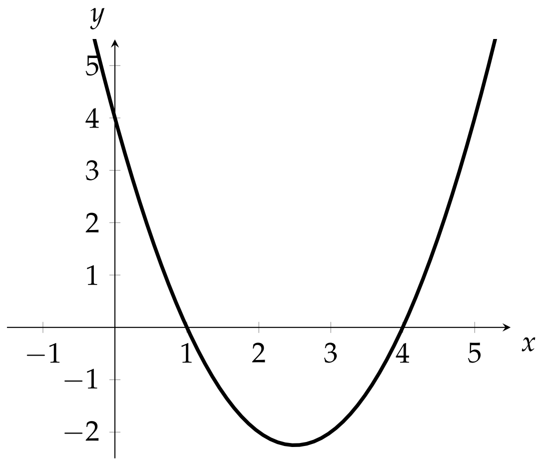
a) Como $a = 1$ a parábola tem concavidade volta para cima e o $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = 16 > 0$ determina dois zeros reais distintos.

b) Como $a = -1$ a parábola tem concavidade volta para baixo e o $\Delta = (8)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-12) = 16 > 0$ determina dois zeros reais distintos.

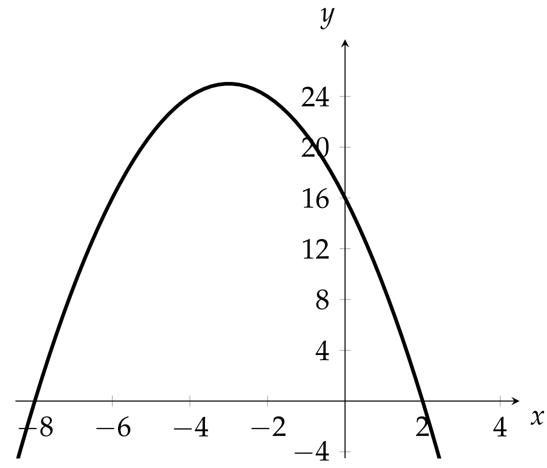
c) Como $a = 1$ a parábola tem concavidade volta para cima e o $\Delta = (18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81 = 0$ determina dois zeros reais iguais (ou apenas um zero real).

2.

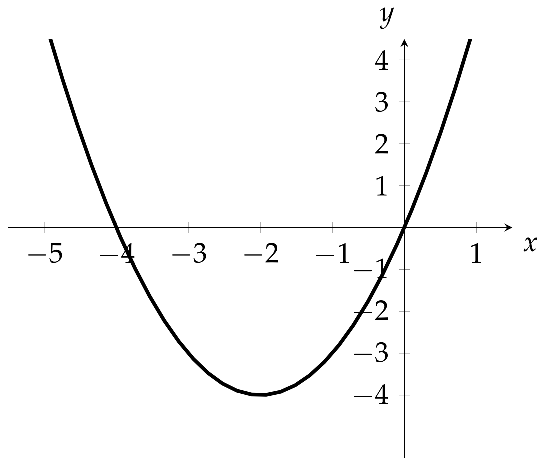
a) Zeros: 1 e 4
Vértice: $x_V = \dfrac{5}{2}$ e $y_V = -\dfrac{9}{4}$
Intersecção com o eixo das ordenadas: $(0; 4)$.



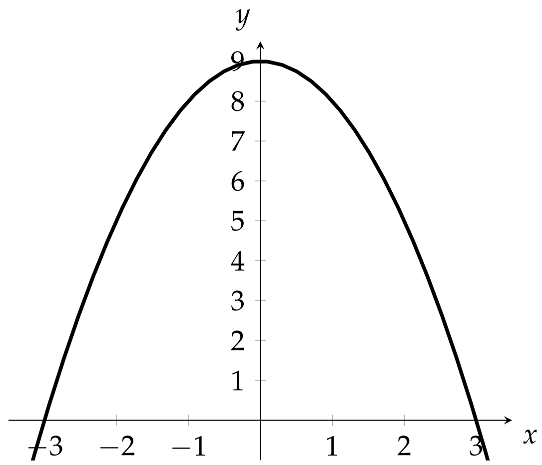
b) Zeros: -8 e 2
Vértice: $x_V = -3$ e $y_V = 25$
Intersecção com o eixo das ordenadas: $(0; 16)$.



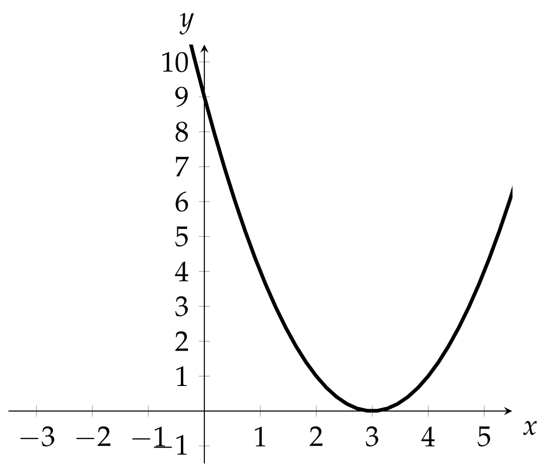
c) Zeros: -4 e 0
Vértice: $x_V = -2$ e $y_V = -4$
Intersecção com o eixo das ordenadas: $(0; 0)$.



d) Zeros: -3 e 3
Vértice: $x_V = 0$ e $y_V = 9$
Intersecção com o eixo das ordenadas: $(0; 9)$.



e) Zero: 3
Vértice: $x_V = 3$ e $y_V = 0$
Intersecção com o eixo das ordenadas: $(0; 9)$.



3. Destacando que o eixo de simetria é a reta perpendicular ao eixo x que passa pela abscissa x_v, teremos que:

a) $x = \dfrac{5}{2}$.

b) $x = -3$.

c) $x = -2$.

d) $x = 0$.

e) $x = 3$.

4. Como a distância entre a raiz dada e o eixo de simetria é 3, a outra raiz é igual a -1. Ainda do enunciado, podemos concluir que o vértice da parábola possui as coordenadas $V(2, 9)$. Utilizando a fatoração

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

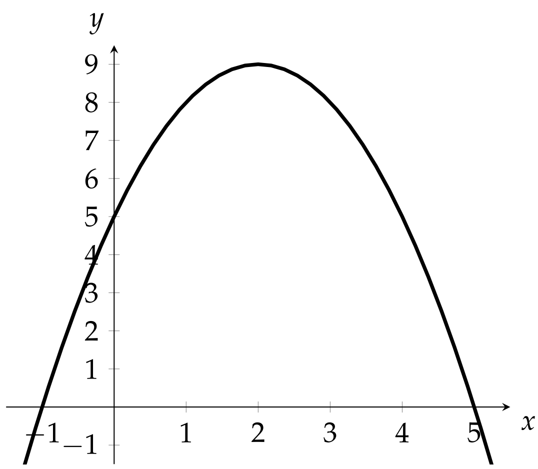
ficamos com

$$\begin{aligned} y &= a(x - (-1))(x - 5) \\ 9 &= a(2 + 1)(2 - 5) \\ a &= -1. \end{aligned}$$

A função procurada é

$$y = -1 \cdot (x + 1)(x - 5) = -x^2 + 4x + 5$$

e o esboço do gráfico é



5. Do gráfico dado, podemos concluir que $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ e o ponto $(0, 3)$ pertence a função. Agora, utilizando a fatoração

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} y &= a(x - (-3))(x - 1) \\ 3 &= a(0 + 3)(0 - 1) \\ a &= -1. \end{aligned}$$

A função fica

$$y = -1 \cdot (x + 3)(x - 1) = -x^2 - 2x + 3.$$

6. Observe que essa função é delimitada inferiormente e seu valor mínimo é

$$\begin{aligned} y_V &= -\frac{\Delta}{4a} \\ y_V &= -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ y_V &= -\frac{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}{4 \cdot 1} \\ y_V &= -\frac{100 - 84}{4} \\ y_V &= -4. \end{aligned}$$

Por fim, ficamos com $Im = [-4, +\infty[$.

7. Sendo $Im =]-\infty; 0]$, temos $a < 0$ e $y_V = 0$. Daí, podemos escrever

$$\begin{aligned} y_V &= 0 \\ y_V &= -\frac{\Delta}{4a} \\ y_V &= -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ 0 &= -\frac{(-8)^2 - 4k \cdot k}{4k} \\ 4k^2 &= 64 \\ k &= \pm\sqrt{16} \\ k &= \pm 4. \end{aligned}$$

Por fim, como $a < 0$, terminamos com $k = -4$.

8. Observe que que as coordenadas do vértice V são $(3, -9)$ e assim podemos concluir (pelo eixo de simetria) que a segunda raiz é igual a 6. Sendo assim, $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$ e utilizando a fatoração

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} y &= a(x - 0)(x - 6) \\ -9 &= a(3)(3 - 6) \\ a &= 1. \end{aligned}$$

A função fica

$$y = 1 \cdot (x - 0)(x - 6) = x^2 - 6x.$$

9. Como a função é sempre positiva temos que $a > 0$ e $\Delta < 0$. Assim, seguimos com

$$\begin{aligned}
\Delta &< 0\\
b^2 - 4ac &< 0\\
[-2(m-2)]^2 - 4(m+1)m &< 0\\
4(m-2)^2 - 4(m^2+m) &< 0\\
(m-2)^2 - (m^2+m) &< 0\\
m^2 - 4m + 4 - m^2 - m &< 0\\
-5m &< -4\\
5m &> 4\\
m &> \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Por fim, o menor inteiro é $m = 1$.

10. Do enunciado, temos que $x_V = 4$, as raízes são $x_1 = -1$ e $x_2 = 9$ e o ponto $(0, -18)$ pertence à função. Sendo assim, aplicando a fatoração

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

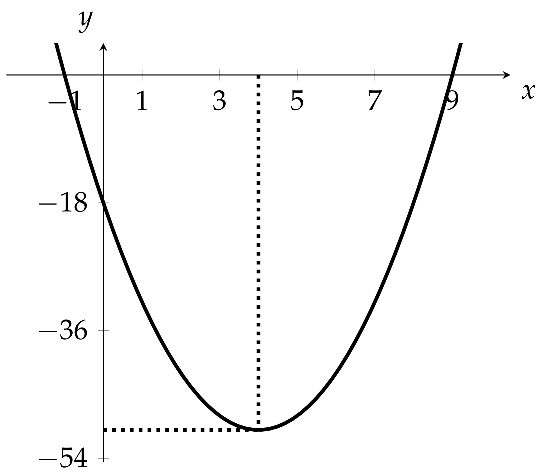
ficamos com

$$\begin{aligned}
y &= a(x - (-1))(x - 9)\\
-18 &= a(0+1)(0-9)\\
a &= 2.
\end{aligned}$$

A função fica

$$y = 2 \cdot (x+1)(x-9) = 2x^2 - 16x - 18.$$

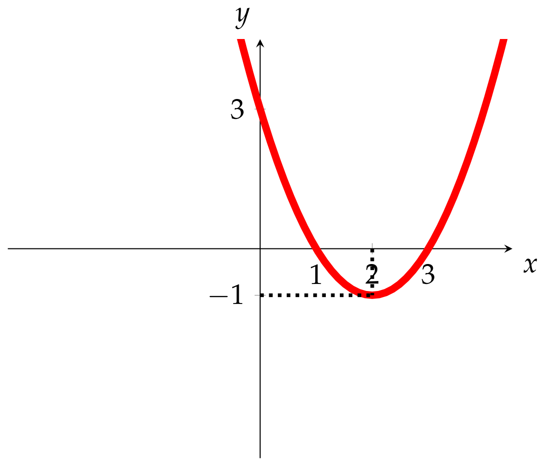
Além disso, o gráfico fica



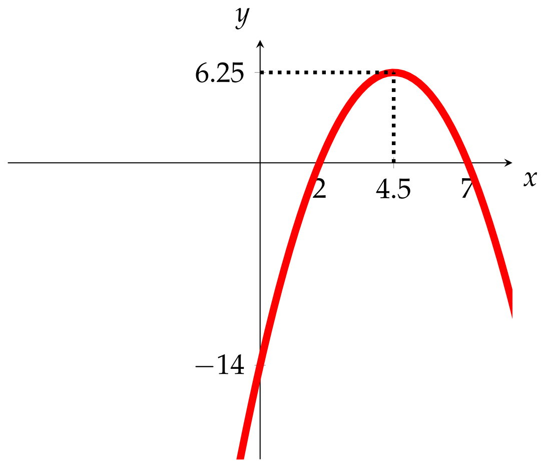
11. O ponto de interseção com o eixo Y é o $(0, 4)$ e a função volta a ter imagem 4 quando $x = 3$. Assim o retângulo tem comprimento 3, altura 4 e área $3 \times 4 = 12$ u.a..

12. Traçando as respectivas funções obtemos todos os gráficos a seguir, ficando

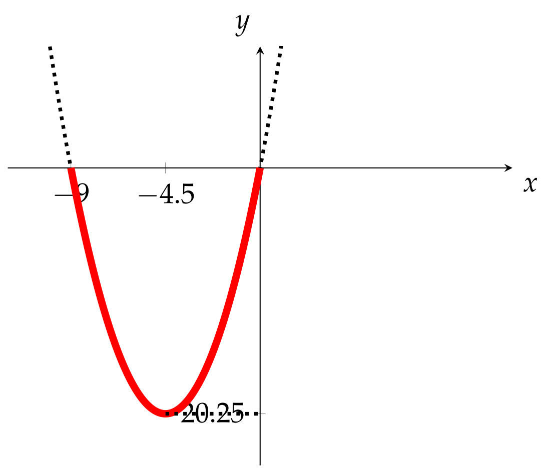
a) a $Im = [-1, \infty]$.



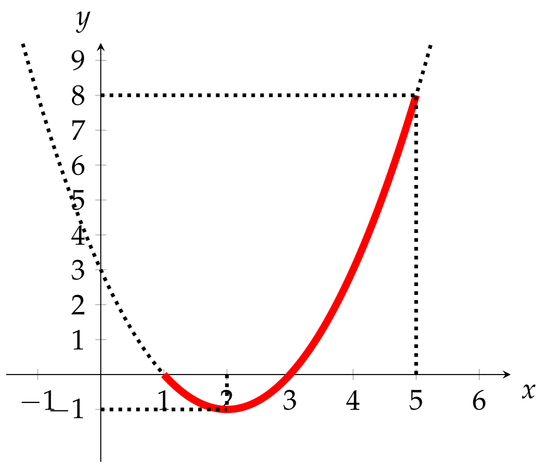
b) a $Im = \left]\infty, \frac{25}{4}\right]$.



c) a $Im = \left[-\frac{81}{4}, 0\right]$.



13. (Extraído do vestibular da ESPM (SP) – 2015)
Esboçando o gráfico, obtemos:



Assim, concluímos que $Im = [-1, 8]$.

14. (Adaptado do Exame de Acesso do PROFMAT – 2013)
Observe que a abscissa do vértice $x_V = 3$, o que permite concluir que os extremos do segmento dado são os pontos $(1, y_1)$ e $(5, y_2)$, com $y_1 = y_2$. Substituindo $x = 1$ ou $x = 5$ na lei dada, encontramos $y_1 = y_2 = 6$ e essa é a distância do segmento dado ao eixo das abscissas.

15. (Adaptado do vestibular da UECE – 2015)
Fazendo as devidas substituições, teremos

$$\begin{aligned} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 &\Leftrightarrow a + b + c = 2 & (1)\\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 5 &\Leftrightarrow 4a + 2b + c = 5 & (2)\\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 4 &\Leftrightarrow 9a + 3b + c = 4. & (3) \end{aligned}$$

Ao proceder com as subtrações $(2) - (1)$ e $(3) - (1)$ ficaremos com

$$\begin{aligned} 3a + b &= 3\\ 8a + 2b &= 2, \end{aligned}$$

sistema que resulta em $a = -2$, $b = 9$ e $c = -5$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(4) &= -2 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 - 5\\ f(4) &= -32 + 36 - 5 = -1. \end{aligned}$$

16. (Adaptado do vestibular da FUVEST – 2015**)**
Podemos concluir que uma das raízes é 30 e que a abscissa $x_V = 10$, portanto, a outra raiz é -10, com coordenadas de V dadas por $(10, 200)$. Sendo assim, aplicando a fatoração

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} y &= a(x - (-10))(x - 30)\\ 200 &= a(10 + 10)(10 - 30)\\ a &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A função é

$$y = -\frac{1}{2} \cdot (x + 10)(x - 30),$$

e, por fim, a altura do lançamento é o termo independente da função, ou seja, $c = 150$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com