Material Teórico - Módulo de EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Exercícios sobre Inequações

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antônio Caminha Muniz Neto

12 de janeiro de 2019

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Com o presente material, finalizamos o conteúdo deste módulo. Nosso principal objetivo ao longo desta aula será treinar os métodos desenvolvidos para soluções de inequações. Para isso, faremos uma bateria de exercícios.

Exemplo 1. *Uma empresa possui* 500 *toneladas de grãos em seu armazém e precisa transportá-los a um cliente. O transporte pode ser feito por caminhões ou por trem. Para cada tonelada transportada por trem paga-se R\$ 8,00 de custo fixo e R\$ 0,015 por quilômetro rodado*[1]*. O transporte rodoviário exige 25 caminhões. Para cada caminhão utilizado paga-se R\$ 125,00 de custo fixo, além de R\$ 0,50 por quilômetro rodado. Suponha que x seja a distância, em quilômetros, entre o armazém e o cliente. Para que intervalo de variação de x o transporte por trem é mais vantajoso que o transporte por caminhões?*

Solução. Vamos fazer o cálculo do custo total nas duas situações:

- Usando caminhões:

$$25(125{,}00 + 0{,}50x) = 3125 + 12{,}5x.$$

- Usando trem:

$$500(8{,}00 + 0{,}015x) = 4000 + 7{,}5x.$$

Dessa forma, o trajeto de trem será mais vantajoso para todos os valores de x que tornam verdadeira a inequação

$$3125 + 12{,}5x > 4000 + 7{,}5x.$$

Tal inequação é claramente equivalente a

$$5x > 875$$

ou, o que é o mesmo, a

$$x > \frac{875}{5} = 175.$$

Portanto, para distâncias superiores a 175 quilômetros, será mais vantajoso escolher o transporte ferroviário. □

Exemplo 2 (FUVEST). *Um estacionamento cobra R\$6,00 pela primeira hora de uso, R\$3,00 por hora adicional e tem uma despesa diária de R\$320,00. Considere-se um dia em que sejam cobradas, no total, 80 horas de estacionamento. Qual é o número mínimo necessário de usuários, nesse dia, para que o estacionamento obtenha lucro?*

[1] Uma vez que no sistema monetário brasileiro não existe 1,5 centavo, cumpre esclarecermos este ponto. Aqui, a ideia é que cada 2 quilômetros rodados adicionam um gasto de 3 centavos, de forma que o valor de R\$ 0,015 por quilômetro rodado quantifica esse gasto *por quilômetro*, e não *por cada dois quilômetros*.

Solução. Supondo que um usuário utilize o estacionamento por h horas, concluímos facilmente que o valor que ele irá pagar será

$$6 + (h-1)3 = 3h + 3.$$

Agora suponha que houve um total de N usuários, que utilizaram o estacionamento durante as quantidades de horas $h_1, h_2, \ldots, h_N$. Então, o cálculo anterior assegura que o valor total pago por todos os usuários foi de

$$\begin{aligned}&(3h_1+3)+(3h_2+3)+\cdots+(3h_N+3)\\ &= 3(h_1+h_2+\cdots+h_N) + (\underbrace{3+3+\cdots+3}_{N\ vezes})\\ &= 3(h_1+h_2+\cdots+h_N)+3N.\end{aligned}$$

Como o enunciado nos diz que $h_1 + h_2 + \cdots + h_N = 80$, concluímos que o valor total pago por todos os usuários foi

$$3 \cdot 80 + 3N = 240 + 3N.$$

Portanto, para que o estacionamento obtenha lucro, devemos ter:

$$240 + 3N > 320$$

ou, o que é o mesmo,

$$3N > 320 - 240 = 80.$$

Então,

$$N > \frac{80}{3} \cong 26{,}67.$$

Por fim, sendo N um número inteiro, obtemos que N deve ser no mínimo 27. □

Exemplo 3. *Quantos números inteiros e positivos satisfazem a inequação*

$$\frac{x}{2} + \frac{2x-7}{3} \le 0?$$

Solução. O primeiro passo é simplificar a inequação, multiplicando todos os termos por 6 (que é o mmc dos denominadores das frações da expressão dada). Como 6 é um número positivo, essa operação não afetará o sinal da inequação, e nos fornecerá a inequação equivalente

$$3x + 2(2x-7) \le 0.$$

Simplificando-a, obtemos sucessivamente

$$7x - 14 \le 0$$

$$7x \le 14$$

$$x \le 2.$$

Portanto, os inteiros positivos que satisfazem a inequação são somente 1 e 2. □

Exemplo 4. *Que condições um quadrado deve satisfazer para que sua área seja numericamente maior que seu perímetro?*

Solução. Sendo x a medida dos lados do quadrado, percebemos que seu perímetro é $x+x+x+x=4x$, enquanto sua a área é x^2. Como queremos que a área seja numericamente maior que o perímetro, devemos ter satisfeita a inequação:

$$x^2 > 4x$$

ou, ainda,

$$x^2 - 4x > 0.$$

Colocando x em evidência, obtemos a inequação equivalente

$$x(x-4) > 0.$$

Por fim, como x é sempre positivo (pois é o comprimento comum dos lados do quadrado), devemos ter

$$x - 4 > 0.$$

Logo, a medida dos lados do quadrado deve ser maior que 4. □

Antes de apresentarmos o próximo problema, relembremos as situações nas quais o produto de dois números não nulos é positivo:

- Se a e b são positivos, então $a \cdot b$ é positivo.
- Se a e b são negativos, então $a \cdot b$ é positivo.
- Se a e b possuem sinais diferentes, então $a \cdot b$ é negativo.

A partir desse fato, consideremos o seguinte

Exemplo 5. *Ache todos os valores reais de x para os quais*

$$(x-2)(7-x) > 0.$$

Solução. Note que a inequação traz, no primeiro membro, dois fatores cujo produto deve ser um número positivo. De acordo com as observações acima, temos duas situações nas quais isso ocorre:

I. Se $x - 2 > 0$ e $7 - x > 0$: nesse caso, temos $x > 2$ e $7 > x$ ou, simplesmente,

$$2 < x < 7.$$

II. Se $x - 2 < 0$ e $7 - x < 0$: nesse caso, temos $x < 2$ e $7 < x$. Porém, não existe nenhum número real que seja simultaneamente menor do que 2 e maior do que 7.

Portanto, a resposta é

$$2 < x < 7.$$

□

2 Dois desafios

Finalizamos este material apresentando dois problemas difíceis de olimpíadas, os quais utilizam noções de inequações.

Exemplo 6 (OBM 2000). *Seja n um número inteiro positivo. Pedro escreveu no quadro todos os números inteiros de 1 a n e, em seguida, apagou um deles. Larissa calculou a média aritmética dos $n-1$ números que sobraram e obteve o valor $\frac{134}{11}$. Qual é o valor de n e qual é o valor do número que foi apagado?*

Em um primeiro momento, observe que este exemplo não parecer ser um problema sobre inequações. Porém, utilizaremos algumas inequações para chegarmos rapidamente ao valor de n. Mas antes, lembre-se de que existe uma forma de calcular a soma dos números de 1 a n utilizando simetria:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Realmente, sendo $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, temos

$$\begin{aligned} 2S &= 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\ &= (1+n) + (2 + (n-1)) + (3 + (n-2)) + \cdots + (n+1) \\ &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ vezes}} \\ &= n(n+1). \end{aligned}$$

Portanto, $S = \frac{n(n+1)}{2}$, conforme desejado.

Voltemos, agora, à solução do exemplo.

Solução. Note que a média dos $n-1$ números restantes é a maior possível quando o número 1 é apagado. Neste caso, (1) garante que tal média vale

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - 1}{n-1} = \frac{n^2+n-2}{2(n-1)} = \frac{(n^2-1)+(n-1)}{2(n-1)}$$
$$\frac{(n-1)(n+2)}{2(n-1)} = \frac{n+2}{2} = \frac{n}{2} + 1.$$

Por outro lado, a média é a menor possível quando o número n é apagado. Neste caso, (novamente por (1)) a média é

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - n}{n-1} = \frac{n^2-n}{2(n-1)} = \frac{n(n-1)}{2(n-1)} = \frac{n}{2}.$$

Uma vez que a média calculada por Larissa foi $\frac{134}{11}$, concluímos que

$$\frac{n}{2} \leq \frac{134}{11} \leq \frac{n}{2} + 1.$$

Portanto,

$$\frac{246}{11} \leq n \leq \frac{268}{11}$$

e, como $\frac{246}{11} \cong 22{,}36$ e $\frac{268}{11} \cong 24{,}36$, concluímos que n só pode ser igual a 23 ou a 24.

Agora, observe que a média dos números restantes é uma fração de denominador 11. Logo, a quantidade de números que restam no quadro ao se apagar um deles deve ser múltipla de 11. Como tal quantidade é $n-1$, segue que $n-1=22$ e, daí, $n=23$.

Por fim, uma vez que a média dos $n-1=22$ números restantes é $\frac{134}{11}$, podemos calcular sua soma como sendo igual a

$$\frac{134}{11}\cdot 22 = 268.$$

Então, uma vez que a soma dos números de 1 a 23 é (novamente por (1)) igual a $\frac{23(23+1)}{2}=276$, temos que o número excluído foi $276-268=8$. □

Exemplo 7 (OBM 2000). *Qual é o menor inteiro positivo que é o dobro de um cubo e o quíntuplo de um quadrado?*

Solução. O primeiro passo para resolver este problema é lembrar que todo número inteiro positivo pode ser decomposto como o produto de potências de primos. Assim, seja N um número que satisfaz as condições do problema e cuja representação fatorada é dada por

$$N = 2^{a_1}3^{a_2}5^{a_3}\cdots$$

Dizer que N é dobro de um cubo significa dizer que todos os a_i são múltiplos de 3, exceto a_1, que deve deixar resto 1 na divisão por 3. Assim, os valores possíveis para a_1 são 1, 4, 7,...

Dizer que N é o quíntuplo de um quadrado significa dizer que todos os a_i são múltiplos de 2, exceto a_3, que deve ímpar. Além disso, pela observação anterior, a_1 deve ser par e a_3 deve ser múltiplo de 3. Assim, o menor valor possível para a_3 é 3 e o menor valor possível para a_1 é 4.

Os demais a_i são todos iguais a zero, uma vez que queremos encontrar o menor N possível. Portanto, tal menor N é

$$N = 2^4\cdot 5^3 = 2000.$$

□

3 Sugestões ao professor

Sugerimos que o professor separe dois encontros de 50 minutos cada para abordar este material. Dê tempo para seus alunos lerem e interpretarem os textos dos enunciados. Também, resolva apenas exemplos simples de problemas que envolvem análise de sinais. Esse tema será melhor aprofundado em módulos futuros, nos quais adotaremos a estratégia de análise de sinais por intervalos. Neste momento, nosso objetivo é que a turma tenha apenas um primeiro contato com esse assunto. Utilize outras questões do material de exercícios resolvidos para complementar os problemas que foram discutidos aqui. Reserve os dois últimos problemas apenas para turmas de nível avançado, ou apresente-os como desafios de pesquisa para serem pensados em casa ou em grupos.