Módulo de Conjuntos

Conjuntos Numéricos

9° ano E.F.

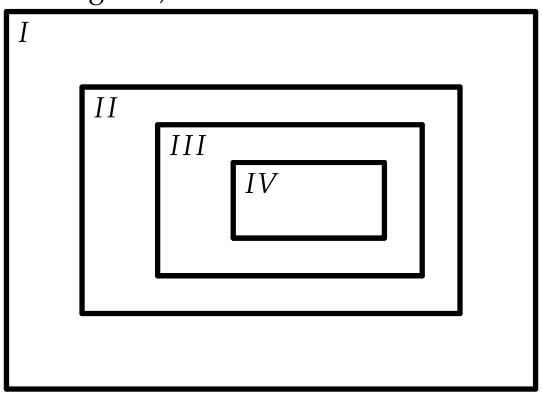
Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Conjuntos
Conjuntos Numéricos

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Uma possível representação dos conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ está no diagrama abaixo, no qual foram destacadas as regiões I, II, III e IV (regiões entre cada um dos retângulos).



Na representação temos o retângulo maior sendo $\mathbb{R}$ e o menor como $\mathbb{N}$. Sendo assim, avalie as proposições abaixo como (V)erdadeira ou (F)alsa.

a) (_____) O número 2 está na região IV.

b) (_____) O número -2 está na região II.

c) (_____) Os números da forma $\dfrac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$ estão na região II.

d) (_____) As dízimas periódicas $0,333\ldots$, $0,454545\ldots$, $2,\overline{6}$ e $-4,\overline{67}$ estão na região II.

e) (_____) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{8}$ e π pertencem à região I.

Exercício 2. Analise dois exemplos de obtenção de fração geratriz das dízimas periódicas $0,333\ldots$ e $0,121212$:

$$\begin{array}{rl} x &= 0,333\ldots \\ 10x &= 3,333\ldots \\ \hline 9x &= 3 \\ x &= \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} x &= 0,121212\ldots \\ 100x &= 12,121212\ldots \\ \hline 99x &= 12 \\ x &= \dfrac{12}{99} = \dfrac{4}{33}. \end{array}$$

Agora, adapte o método acima para calcular uma fração geratriz para cada umas das dízimas abaixo.

a) $0,444\ldots$.

b) $0,151515\ldots$

c) $2,\overline{1}$.

Exercício 3. Já sabemos que $\sqrt{1} = 1$ e $\sqrt{4} = 2$, por isso podemos inferir que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são maiores que 1 e menores que 2. Utilizando uma calculadora, estime:

a) qual a melhor aproximação com uma casa decimal para $\sqrt{2}$?

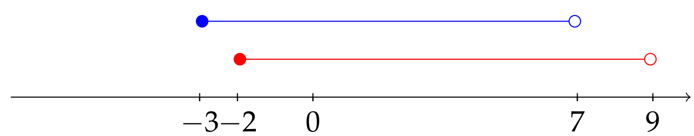
b) qual a melhor aproximação com uma casa decimal para $\sqrt{3}$?

c) qual a melhor aproximação com duas casas decimais para $\sqrt{2}$?

d) qual a melhor aproximação com duas casas decimais para $\sqrt{3}$?

e) qual a melhor aproximação com duas casas decimais para $\sqrt{5}$?

Exercício 4. Os subconjuntos de $\mathbb{R}$ têm uma representação geométrica para facilitar a visualização dos seus elementos. Por exemplo, os subconjuntos $A = [-3, 7[$ e $B =]-2; 9]$ podem ser representados por



Sendo assim, represente da mesma maneira os intervalos

a) $C =]-4, 2[$.

b) $D = [1, 4]$.

c) $E =]-5, 6]$.

d) $F = [-1, 3[$.

Exercício 5. Temos $A = [-3, 7[$ e $B =]-2; 9]$ representados no diagrama da questão anterior. Sendo assim, responda as operações abaixo utilizando intervalos reais.

a) $A \cup B$.

b) $A \cap B$.

c) $A - B$.

d) $B - A$.

e) $A \Delta B$.

Exercício 6. Qual a quantidade de elementos do conjunto que possui todos os números naturais de 8 até 908?

Exercício 7. Quantos números escrevemos ao numerarmos as páginas de um livro de 10 até 20? E quantos algarismos são usados para isso?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Quantos elementos há no conjunto $\{7, 14, 21, \ldots, 679, 686\}$?

Exercício 9. Ao escrevermos todos os números naturais de 40 até 1200, quantos algarismos utilizamos?

Exercício 10. Quantos números inteiros positivos existem entre $\sqrt{8}$ e $\sqrt{80}$?

Exercício 11. Analise o exemplo de obtenção de uma fração geratriz da dízima periódica $1,2333\ldots$:

$$\begin{aligned} x &= 1,2333\ldots \\ 10x &= 12,333\ldots \\ 100x &= 123,333\ldots \\ \hline 90x &= 111 \\ x &= \frac{111}{90} = \frac{37}{30} \end{aligned}$$

Agora, adapte o método acima para calcular uma fração geratriz para cada umas das dízimas abaixo.

a) $-0,666\ldots$.

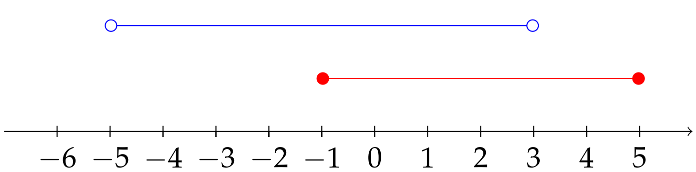
b) $5,3888\ldots$.

c) $1,8999\ldots$.

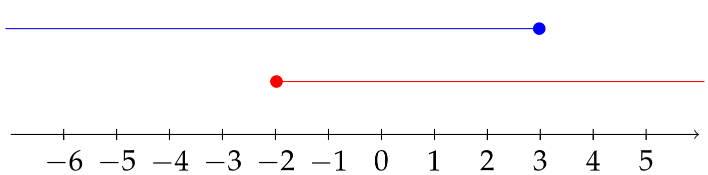
d) $1,2010101\ldots$.

Exercício 12. Observe o diagrama abaixo e conclua respondendo o que for pedido.

a) Quais intervalos reais que estão representados a seguir?



b) Abaixo temos $A =]-\infty, 3]$ e $B = [-2, \infty[$. Quais os intervalos $A \cup B$ e $A \cap B$?



3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Se n é um número inteiro qualquer, qual das expressões abaixo resulta num número ímpar?

a) $n^2 - n + 2$ c) $n^2 + n + 5$ e) $n^3 + 5$

b) $n^2 + n + 2$ d) $n^2 + 5$

Exercício 14. Quantos elementos há no conjunto $\{14, 19, 24, \ldots, 1004, 1009\}$?

Exercício 15. Qual é a soma de todos os números de três algarismos?

Exercício 16. Mário e Marcos decidiram comer pizza juntos. Mário decidiu repartir a pizza e retirou $1/4$ (um quarto) da pizza para ele e deu $1/6$ (um sexto) do que restou para Marcos, a fim de, evitar discussões sobre quem comeu mais, da segunda vez que Mário foi repartir a pizza ele ficou com $1/6$ (um sexto) do que havia restado e deu $1/4$ (um quarto) do que ficou para Marcos, dizendo que agora eles haviam comido a mesma quantidade de pizza. Mário estava certo?

Exercício 17. Considere a, b, c e d, definidos por

- $a = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{304}$,
- $b = \frac{1}{7} + \frac{1}{67} + \frac{1}{8911}$,
- $c = \frac{1}{3} + \frac{1}{29} + \frac{1}{1653}$ e
- $d = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{988}$.

Determine o menor valor positivo de n tal que na, nb, nc e nd são inteiros.

Exercício 18. Qual é o primeiro dígito não nulo após a vírgula na representação decimal da fração $\frac{1}{5^{12}}$?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 7

Exercício 19. Considere o número

$$X = 1,01001000100001\ldots.$$

(O padrão se mantém, ou seja, a quantidade de zeros entre números uns consecutivos sempre aumenta exatamente uma unidade).

a) Qual é a sua 25^a casa decimal após a vírgula?

b) Qual é a sua 500^a casa decimal após a vírgula?

c) O número X é racional ou irracional?

Exercício 20. Dados dois reais positivos, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{4}$, determine o maior.

Exercício 21. O número $\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ está situado entre $\sqrt{n}$ e $\sqrt{n+2}$, onde n é inteiro positivo. Determine n.

Exercício 22. Calcule o menor inteiro positivo n tal que as 73 frações

$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, \ldots, \frac{91}{n+93}$$

sejam todas irredutíveis.

Exercício 23. A sequência F_n de Farey é uma sequência de conjuntos formados pelas frações irredutíveis $\frac{a}{b}$ com $0 \leq a \leq b \leq n$ arranjados em ordem crescente. Exibimos abaixo os quatro primeiros termos da sequência de Farey.

$$\begin{aligned} F_1 &= \{0/1, 1/1\} \\ F_2 &= \{0/1, 1/2, 1/1\} \\ F_3 &= \{0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1\} \\ F_4 &= \{0/1, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1/1\} \end{aligned}$$

Qual deve ser o conjunto F_5?

Exercício 24. É possível mostrar que se duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são vizinhas na sequência de Farey F_n (veja o exercício anterior) então $ad - bc = \pm 1$. Sabendo disso, você consegue determinar que fração $\frac{a}{b}$ está imediatamente à esquerda de $\frac{5}{7}$ em F_7 sem calcular todos os seus elementos?

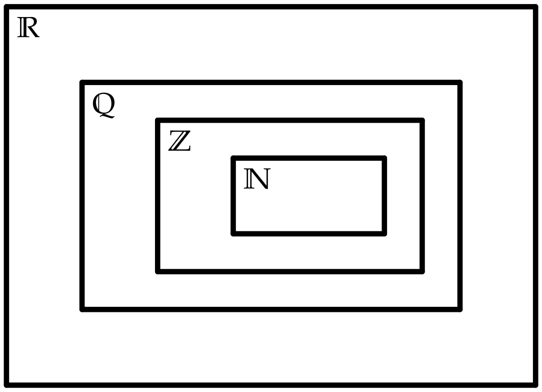
Exercício 25. Considere dois tambores de capacidade suficientemente grande.

a) Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido de um dos tambores no outro usando dois baldes, um com capacidade de 5 e o outro com capacidade de 7 litros.

b) Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido de um dos tambores no outro usando dois baldes, um com capacidade de $2-\sqrt{2}$ e o outro com capacidade de $\sqrt{2}$ litros.

Respostas e Soluções.

1. Temos que as áreas (os subconjuntos) destacadas podem ser interpretadas como



$$\begin{array}{c} \text{Região } I := \mathbb{R} - \mathbb{Q}; \\ \text{Região } II := \mathbb{Q} - \mathbb{Z}; \\ \text{Região } III := \mathbb{Z} - \mathbb{N};\ \text{e} \\ \text{Região } IV := \mathbb{N}. \end{array}$$

Assim, podemos avaliar as proposições como:

a) Verdadeira, pois $2 \in \mathbb{N}$.

b) Falsa, pois $-2 \notin (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$.

c) Falsa, pois todo inteiro pode ser escrito como uma fração com denominador 1 ou como alguma fração aparente equivalente a ele.

d) Verdadeira, os números $0,333\ldots$, $0,454545\ldots$, $2,\overline{6}$ e $-4,\overline{67}$ equivalem a frações geratrizes não inteiras.

e) Verdadeira, como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{8}$ e π são números irracionais, pertencem ao conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

2.

a)

$$\begin{array}{rcl} x &=& 0,444\ldots \\ 10x &=& 4,444\ldots \\ 9x &=& 4 \end{array}$$

Logo, $x = \dfrac{4}{9}$.

b)

$$\begin{array}{rcl} x &=& 0,151515\ldots \\ 100x &=& 15,151515\ldots \\ 99x &=& 15 \end{array}$$

Logo, $x = \dfrac{15}{99} = \dfrac{5}{33}$.

c)

$$\begin{array}{rcl} x &=& 2,111\ldots \\ 10x &=& 21,111\ldots \\ 9x &=& 19 \end{array}$$

Logo, $x = \dfrac{19}{9}$.

3. Com a ajuda de uma calculadora podemos escrever a tabela abaixo:

Valor	Quadrado	Melhor Aproximação
1,1	1,21	
1,2	1,44	
1,3	1,69	
1,4	1,96	para $\sqrt{2}$
1,5	2,25	
1,6	2,56	
1,7	2,89	para $\sqrt{3}$
1,8	3,24	
1,9	3,61	

a) $1,4^2 = 1,96$, pois $1,5^2 > 2$.

b) $1,7^2 = 1,96$, pois $1,8^2 > 3$.

c) Analisando os casos iniciais temos que

Valor	Quadrado	
1,41	1,9881	melhor aproximação
1,42	2,0164	maior do que 2

Sendo assim, a melhor aproximação de $\sqrt{2}$ com duas casas demais é $1,41$.

d) Analisando os casos iniciais temos que

Valor	Quadrado	
1,71	2,9241	
1,72	2,9584	
1,73	2,9929	melhor aproximação
1,74	3,0276	maior do que 3

Sendo assim, a melhor aproximação de $\sqrt{3}$ com duas casas demais é $1,73$.

e) Agora, como $\sqrt{5} > 2$ considere as tabelas abaixo:

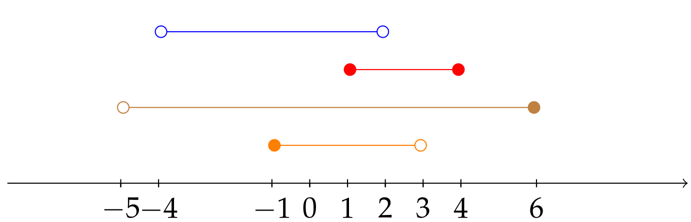
Valor	Quadrado	
2.1	4.41	
2.2	4.84	melhor aproximação
2.3	5.29	maior do que 5

e

Valor	Quadrado	
2.21	4.8841	
2.22	4.9284	
2.23	4.9729	melhor aproximação
2.24	5.0176	maior do que 5

Sendo assim, a melhor aproximação de $\sqrt{5}$ com duas casas demais é $2,23$.

4. A representação final é



5. Analisando o diagrama temos:

a) $A \cup B = [-3, 9[$.

b) $A \cap B = [-2, 7[$.

c) $A - B = [-3, -2[$.

d) $B - A = [7, 9[$.

e) Como

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A),$$

ficamos com $A \Delta B = [-3, -2[\cup [7, 9[$.

6. Observe que se tivéssemos começado a contar pelo número 1, não haveria dúvidas quanto a quantidade de elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 908\}$. Como começamos sete unidades a mais que o 1, a resposta automática seria $908 - 8 = 900$. Este é um excelente ponto para lembrar que subtração não indica quantidade e sim "distância" entre dois números. Ao calcularmos a distância do 908 (ou de m) até o 8 (ou de n) estamos contando apenas o espaço entre eles, sendo assim, após a subtração devemos adicionar uma unidade para calcular a exata quantidade. Por fim, a quantidade será

$$908 - 8 + 1 = 901 \text{ números.}$$

De modo geral, a quantidade de números inteiros de m até n, sendo $m > n$, é $m - n + 1$.

Outra solução: Uma outra estratégia é fazermos um ajuste na contagem deslocando cada valor até o ponto inicial, o 1, e depois simplesmente olhar onde terminou. Como $8 - 7 = 1$ e $908 - 7 = 901$, a quantidade de elementos do conjunto $\{8, 9, 10, \ldots, 908\}$ é mesma que a do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 901\}$, isto é, 901 elementos.

7. (Extraído da Vídeo Aula)
Observe que os números usados são

$$\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

São $20 - 10 + 1 = 11$ números, cada um com dois algarismos, logo foram usados $11 \times 2 = 22$ algarismos.

8. Perceba que poderíamos dividir todos os elementos do conjunto por 7 para começarmos a contar do 1 ficando com $\{1, 2, 3, \ldots, 97, 98\}$. Portanto, há 98 elementos no conjunto inicial.

9. (Extraído da Vídeo Aula)
Observe que de 40 até 99 há $99 - 40 + 1 = 60$ números de dois algarismos cada, logo foram utilizados $60 \times 2 = 120$ algarismos. Agora, de 100 até 999 há $999 - 100 + 1 = 900$ números de três algarismos, o que totaliza $900 \times 3 = 2700$ algarismos. Seguindo de 1000 até 1200 são $1200 - 1000 + 1 = 201$ números com quatro algarismos, ou seja, $201 \times 4 = 804$. Por fim, teremos

$$120 + 2700 + 804 = 3624 \text{ algarismos utilizados.}$$

10. Como $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$ e $\sqrt{64} = 8 < \sqrt{80} < \sqrt{81} = 9$. O primeiro inteiro positivo maior que $\sqrt{8}$ é 3 e o último inteiro menor que $\sqrt{80}$ é 8. Sendo assim, teremos 6 inteiros positivos, a saber $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

11.

a)

$$\begin{aligned} x &= -0,666\ldots \\ 10x &= -6,666\ldots \\ 9x &= -6 \end{aligned}$$

Logo, $x = -\dfrac{6}{9} = -\dfrac{2}{3}$.

b)

$$\begin{aligned} x &= 5,3888\ldots \\ 10x &= 53,888\ldots \\ 100x &= 538,888\ldots \\ 90x &= 485 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{485}{90} = \dfrac{97}{18}$.

c)

$$\begin{aligned} x &= 1,8999\ldots \\ 10x &= 18,999\ldots \\ 100x &= 189,999\ldots \\ 90x &= 171 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{171}{90} = \dfrac{19}{10}$.

d)

$$\begin{aligned} x &= 1,2010101\ldots \\ 10x &= 12,010101\ldots \\ 1000x &= 1201,010101\ldots \\ 990x &= 1189 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{1189}{990}$.

12. Analisando cada diagrama temos:

a) Os conjuntos são $]-5, 3[$ e $[-1, 5]$.

b) Os conjuntos são $A \cup B = \mathbb{R}$ e $A \cap B = [-2, 3]$.

13. (Adaptado da OBMEP)
Observe que se n é ímpar, então $n = 2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ e

$$\begin{aligned} n^2 \pm n &= (2k+1)^2 \pm (2k+1) \\ n^2 \pm n &= 4k^2 + 4k + 1 \pm (2k+1) \\ n^2 \pm n &= 2(2k^2 + 2k \pm k) + (1 \pm 1), \end{aligned}$$

que é par. Assim, $n^2 \pm n$ será par. Como deseja-se um número ímpar, basta somarmos um ímpar. A resposta está na letra **c**.

14. Perceba que podemos subtrair 9 de cada elemento do conjunto inicial e ficaremos com o conjunto $\{5, 10, 15, \ldots, 995, 1000\}$. Agora, dividindo todos os elementos do novo conjunto por 5 ficamos com

$$\{1, 2, 3, \ldots, 199, 200\}.$$

Portanto, há 200 elementos no conjunto inicial.

15. A soma pedida é

$$\begin{aligned} S &= 100 + 101 + 102 + \cdots + 999 \\ &= \frac{900 \cdot (100 + 999)}{2} \\ &= 494550. \end{aligned}$$

16. (Extraído da Olimpíada Pessoense − 2011)
Mário se enganou pois da primeira vez que a pizza foi repartida ele ficou com $1/4$ e Marcos com

$$\frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}.$$

Quando a pizza foi repartida pela segunda vez Mário ficou com

$$\frac{1}{6} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)\right] = \frac{5}{48},$$

e Marcos ficou com

$$\frac{1}{4} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{5}{48}\right)\right] = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{23}{48}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{48} = \frac{25}{192}.$$

Agora, temos que

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{48} > \frac{1}{8} + \frac{25}{192}.$$

Portanto, Mário estava errado.

17. (Extraído da Olimpíada Pessoense − 2013)
Cada uma das somas de frações podem ser efetuadas e simplificadas:

- $a = \dfrac{76+19+1}{304} = \dfrac{6}{19}$;
- $b = \dfrac{1273+133+1}{8911} = \dfrac{1407}{8911} = \dfrac{3}{19}$;
- $c = \dfrac{551+57+1}{1653} = \dfrac{609}{1653} = \dfrac{7}{19}$ e
- $d = \dfrac{494+247+38+1}{988} = \dfrac{780}{988} = \dfrac{15}{19}$.

Como todas as frações simplificadas têm denominadores iguais a 19, n deve ser múltiplo de 19. Além disso, se $n = 19$ então na, nb, nc e nd são iguais aos inteiros 6, 3, 7 e 15, respectivamente. Portanto, esse é o menor valor de n para o qual esses valores são inteiros.

18. Multiplicando a fração inicial por $\dfrac{2^{12}}{2^{12}}$ teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5^{12}} &= \frac{1}{5^{12}} \cdot \frac{2^{12}}{2^{12}} \\ &= \frac{2^{12}}{10^{12}} \end{aligned}$$

Como $2^{12} = 4096$, o primeiro dígito não nulo após a vírgula é 4. Resposta C.

19.

a) 0.

b) Um grupo de k zeros é separado de um grupo seguinte de $k+1$ zeros por exatamente um número 1. Assim, contando até o dígito 1 que sucede um grupo de k zeros, temos:

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+k}_{\text{algarismos zeros}} + \underbrace{k}_{\text{algarismos uns}} = \frac{k(k+3)}{2}.$$

Se $k = 30$, já teremos $\dfrac{30(33)}{2} = 495$. Consequentemente a 500^{a} casa decimal vale *zero* pois está no grupo com 31 zeros.

c) O número X não é racional porque sua representação decimal não é periódica uma vez que a quantidade de algarismos zeros entre dois 1's consecutivos sempre está aumentando.

20. (Extraído da UNICAMP)
Uma boa estratégia seria eliminar os radicais elevando ambos números a uma potência múltipla de 3 e 4. Veja que:

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{3})^{12} &= 3^4 \\ &= 81 \\ &> 64 \\ &= 4^3 \\ &= (\sqrt[4]{4})^{12} \end{aligned}$$

Portanto, como $(\sqrt[3]{3})^{12} > (\sqrt[4]{4})^{12}$, segue que $\sqrt[3]{3}$ é o maior.

21. (Extraído do Colégio Naval)
Façamos uma primeira estimativa:

$$\begin{gathered} 1 < 4 < 8 \\ 1^3 < 4 < 2^3 \\ \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{8} \\ 1 < \sqrt[3]{4} < 2 \end{gathered}$$

Segunda estimativa:

$$\begin{gathered} 8 < 16 < 27 \\ 2^3 < 16 < 3^3 \\ \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{27} \\ 2 < \sqrt[3]{16} < 3 \end{gathered}$$

Finalmente, somando as duas últimas desiguldades obtidas, temos:

$$\begin{gathered} 3 < \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} < 5 \\ 4 < 1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} < 6 \\ \sqrt{4} < \sqrt{1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}} < \sqrt{6} \end{gathered}$$

Portanto, $n = 4$.

22. (Extraído da prova da Cone Sul publicada na Revista Eureka número 5)
A fração $\frac{a}{b}$ é irredutível se e só se $\frac{a}{b-a}$ é irredutível (se a e b tem um fator comum, então a e $b-a$ têm um fator comum, e reciprocamente). O problema se transforma em achar o menor valor de n tal que as frações sejam todas irredutíveis. Observe que as frações anteirores possuem a forma $\dfrac{a}{n+a+2}$ e pelo critério anterior bastaria que $\dfrac{a}{n+2}$ fosse irredutível. Tendo isso em mente, se $n+2$ é um primo maior que 91, todas as frações serão irredutíveis. Assim, um valor possível de n é 95 pois $n+2 = 97$ é um número primo. Verifiquemos que é o menor possível.

(a) Se $n+2 < 97$ e $n+2$ é par, então n é par e há frações redutíveis como, por exemplo, $\dfrac{20}{n+2}$.

(b) Se $19 \leq n+2 \leq 91$, obviamente há uma fração redutível.

(c) Se $n+2 < 19$, então $n+2$ tem um múltiplo entre 19 e 91 e, portanto, há uma fração redutível.

(d) Se $n+2 = 93 = 3.31$, então $\frac{31}{n+2}$ é redutível.

(e) Se $n+2 = 95 = 5.19$, então $\frac{19}{n+2}$ é redutível.

Logo, o valor mínimo de $n+2$ é 97, que corresponde a $n = 95$.

23.
$F_5 = \{0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1\}$.

24. Usando a propriedade dada no enunciado, temos $7a - 5b = \pm 1$. Veja que $7a$ deve deixar resto 1 ou 6 na divisão por 5. Dentre os valores possíveis de a no conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 7\}$, apenas 2 e 3 satisfazem tal condição. Se $a = 2$, temos $b = 3$. Se $a = 3$, teremos $b = 4$. Entretanto, como $\dfrac{2}{3} < \dfrac{5}{7} < \dfrac{3}{4}$, a fração procurada é $\dfrac{2}{3}$.

25.

a) Basta usar três vezes o balde de 5 litros e, em seguida, retirar duas vezes líquido do tambor usando o balde de 7 litros. Dessa forma, transportamos $3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$ litro.

b) A quantidade a que podemos transportar de um tambor para o outro é da forma $k(2-\sqrt{2}) + l(\sqrt{2})$ litros onde k e l são inteiros indicando quantas vezes tiramos ou colocamos líquidos usando cada um dos baldes. Se $l - k \neq 0$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} a &= k(2-\sqrt{2}) + l\sqrt{2} \\ a - 2k &= \sqrt{2}(l-k) \\ \frac{a-2k}{l-k} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Assim, o número $\sqrt{2}$ seria o quociente de dois inteiros o que resultaria em um número racional. Sabemos que isso não pode acontecer porque $\sqrt{2}$ é irracional. Falta analisarmos o que acontece quando $l = k$. A equação se transforma em:

$$\begin{aligned} a &= k(2-\sqrt{2}) + l\sqrt{2} \\ &= k(2-\sqrt{2}) + k\sqrt{2} \\ &= 2k. \end{aligned}$$

Veja que $2k$ é par e assim não podemos levar um valor ímpar como $a = 1$. Em qualquer caso, não é possível colocar exatamente 1 litro usando os baldes com as capacidades dadas neste item.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com