Álgebra Linear
Lista 3 — Espaços vetoriais e transformações lineares

Prof. Adriano Barbosa

---

1. Verifique que são válidas todas as propriedades de espaço vetorial para os vetores $u = (2, 0, -3, 1)$, $v = (4, 0, 3, 5)$ e $w = (1, 6, -2, 1)$ juntamente com os escalares $a = 5$ e $b = -3$.

2. Verifique se o $\mathbb{R}^2$ é fechado com relação as operações dadas
   (a) $(x, y) \oplus (x^{'}, y^{'}) \mapsto (x + x^{'}, y + y^{'})$
   $\alpha \odot (x, y) \mapsto (2\alpha x, 2\alpha y)$
   (b) $(x, y) \oplus (x^{'}, y^{'}) \mapsto (x + x^{'} + 1, y + y^{'} + 1)$
   $\alpha \odot (x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)$

3. Dados $u_1 = (-1, 3, 2, 0)$, $u_2 = (2, 0, 4, -1)$, $u_3 = (7, 1, 1, 4)$ e $u_4 = (6, 3, 1, 2)$, encontre a, b, c e d tais que $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = (0, 5, 6, -3)$.

4. Mostre que não existem escalares c_1, c_2 e c_3 tais que $c_1(1, 0, 1, 0) + c_2(1, 0, -2, 1) + c_3(2, 0, 1, 2) = (1, -2, 2, 3)$.

5. (a) Expresse $(-9, -7, 15)$ e $(7, 8, 9)$ como combinação linear de $(2, 1, 4)$, $(3, 2, 5)$ e $(1, -1, 3)$.
   (b) Expresse $-9 - 7x - 15x^2$ e $9x^2 + 8x + 7$ como combinação linear de $2 + x + 4x^2$, $3 + 2x + 5x^2$ e $1 - x + 3x^2$.
   (c) Expresse $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ como combinação linear de $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

6. Calcule o subespaço gerado pelos vetores $\{1 + x, x^2, -2\}$.

7. Decida se os conjuntos de vetores são LI ou LD:
   (a) $\{(-1, 2, 4), (5, -10, -20)\}$ em $\mathbb{R}^3$.
   (b) $\{(3, 0, -3, 6), (0, 2, 3, 1), (0, -2, -2, 0), (-2, 1, 2, 1)\}$ em $\mathbb{R}^4$.
   (c) $\{-x^2 + 6, 4x^2 + x + 1\}$ em $\mathcal{P}_2$.
   (d) $\left\{ \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ em $M(2, 2)$.

8. Quais dos conjuntos são base de $\mathcal{P}_2$
   (a) $\{1 - 3x + 2x^2, 1 + x + 4x^2, 1 - 7x\}$

(b) $\{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$

9. Mostre que o conjunto abaixo é uma base de $M(2,2)$
$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

10. Dado $v = (-2,3,0,6)$, para quais valores de k temos $\|kv\| = 5$.

11. Verifique que a desigualdade de Cauchy-Schwarz $\|\langle u,v\rangle\| \leq \|u\|\|v\|$ é válida para os vetores:

    (a) $u = (3,2)$ e $v = (4,-1)$

    (b) $u = (-3,1,0)$ e $v = (2,-1,3)$

    (c) $u = (0,-2,2,1)$ e $v = (-1,-1,1,1)$

12. Verifique que a identidade $A\langle u,v\rangle = vA^Tu$ é válida para $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $u = (3,1)$ e $v = (-2,6)$.

13. Encontre o domínio e o contradomínio das transformações definidas abaixo e determine se elas são lineares:

    (a) $(x,y,z) \mapsto (3x-2y+4z, 5x-8y+z)$

    (b) $(x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (x_1^2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4, 3x_1 - 4x_2 - x_3^2 + x_4)$

14. Encontre a matriz da transformação linear com relação as bases canônicas:

    (a) $T(x,y) = (2x-y, x+y)$

    (b) $T(x,y,z) = (4x, 7y, -8z)$

15. Dadas as matrizes das transformações lineares com relação as bases canônicas abaixo, escreva a expressão da transformação linear na forma de função:

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

    (b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

16. Combine as matrizes de rotação de $30°$, $-30°$ e $45°$ para calcular a matrizes de rotação de $15°$ e $75°$.

17. Encontre a matriz da transformação linear resultante de uma expansão de 2, seguida de uma rotação de $45°$, seguida de uma reflexão em torno do eixo x. Verifique sua resposta transformando o vetor $(1,1)$, cujo transformado será $(0,-4)$.

18. Calcule o núcleo e a imagem das transformações lineares:

(a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (4x - 2y, 2x - y)$

(b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - 2y + z, 5x - y + 3z, 4x + y + 2z)$

19. Determine se a transformação linear associada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ dada nas bases canônicas é injetiva.

20. Verdadeiro ou falso. Justifique dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.

    (a) Se $T(0) = 0$, então T é linear.

    (b) Se $T : V \to W$ é uma transformação linear injetiva, então existem vetores distintos u, $v \in V$ tais que $T(u - v) = 0$.