Módulo de Matrizes e Sistemas Lineares

Sistemas Lineares

Matrizes e Sistemas Lineares
Sistemas Lineares

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine quais das equações abaixo são lineares

(a) $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

(b) $x_1 + x_2^2 + x_3^3 = 1$.

(c) $\sqrt{3}x_1 + \sqrt{5}x_2 = 6$.

(d) $\dfrac{3x_1 + 4x_2}{7x^3} = x_4$.

(e) $\sqrt{x_1 + x_2} = 0$.

Exercício 2. Verifique em qual das equações abaixo $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 1)$ é solução.

(a) $2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$.

(b) $x_2 + 3x_3 = 7$.

(c) $2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 8$.

(d) $4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 10$.

(e) $x_2 + 2x_4 = 3$.

Exercício 3. Escreva na forma matricial os sistemas lineares nas incógnitas x, y e z:

(a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x - y - z = 2 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} ax + by + cz = 7 \\ bx + ay - cz = 6 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} (\operatorname{sen} a)x + (\cos b)y = 5 \\ (\cos b)x + (\operatorname{sen} a)y = 2 \end{cases}$$

Exercício 4. Quais são os sistemas correspondentes às representações matriciais abaixo?

(a)
$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercício 5. Resolva pelo método da substituição dos seguintes sistemas:

(a)
$$\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ y - z = 4 \\ 2z = 8 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 4 \\ x + z = 8 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + y + z = 4 \\ y + x = 3 \end{cases}$$

Exercício 6. Determine sistemas escalonados equivalentes a cada um dos seguintes sistemas

(a)
$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ -x + 16z = 4 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

Exercício 7. Discuta o sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + 4y - 3z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Resolva o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ x - 4y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Exercício 9. Dado o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x - 2my + 3z = 0 \\ 2x + 6y - 4mz = 0 \end{cases}$$

determinar m para que o mesmo admita soluções distintas da trivial e determiná-las.

Exercício 10. Qual o valor de k para que o sistema

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

admita solução própria?

Exercício 11. Classifique o sistema abaixo

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z3 \end{cases}$$

Exercício 12. Discuta o sistema

$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 8x + 4y = 3 \end{cases}$$

Exercício 13. Resolva usando o Método do Escalonamento Gaussiano o sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y = 14 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Exercício 14. As somas das três colunas e das três linhas da matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

são iguais. Qual é o menor número de entradas da matriz que devem ser alteradas para que todas as novas seis somas sejam diferentes entre si?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Determinar os valores de k, para que tenha solução a equação matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 10 & 4 \\ 6 & 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ k \end{pmatrix}.$$

Além disso, para os valores encontrado de k, determine a solução (x, y, z).

Exercício 16. Discuta o sistema em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Exercício 17. Discuta o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ -x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

Exercício 18. Resolva usando o Método do Escalonamento Gaussiano o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 2x - y = 4 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$$

Exercício 19. Resolva o sistema de equações abaixo.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = -3 \\ x_5 + x_6 + x_7 = -9 \\ x_6 + x_7 + x_8 = -6 \\ x_7 + x_8 + x_1 = -2 \\ x_8 + x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

Exercício 20. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 48 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 96. \end{cases}$$

Exercício 21. Se n é um número real, então o sistema de equações simultâneas

$$\begin{cases} nx + y = 1 \\ ny + z = 1 \\ x + nz = 1 \end{cases}$$

não possui solução se, e somente se, n é igual a
a) -1 b) 0 c) 1 d) 0 ou 1 e)1/2

Respostas e Soluções.

1. São lineares apenas a) e c)

2.

(a) Como $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 + 1 = 7$, $(1, 1, 1, 1)$ é solução.

(b) Como $1 + 3 \cdot 1 \neq 7$, $(1, 1, 1, 1)$ não é solução.

(c) Como $2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 1 + 1 \neq 7$, $(1, 1, 1, 1)$ não é solução.

(d) Como $4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 + 1 \neq 10$, $(1, 1, 1, 1)$ não é solução.

(e) Como $1 + 2 \cdot 1 = 3$, segue que $(1, 1, 1, 1)$ é solução.

3.

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & -c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen} a & \cos b \\ \cos b & \operatorname{sen} a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4.

(a)

$$\begin{cases} 9x + 3y = 4 \\ 5x + 7y = 5 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 4x + 1y + 8z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

5.

(a) Pela terceira equação, temos $z = 4$. Substituindo na segunda equação, temos $y = 8$. Finalmente, substituindo esses valores na primeira equação, temos $x = -19$

(b) Usando as duas últimas equações, temos $y = 4 - z$ e $x = 8 - z$. Substituindo esses valores na primeira equação, temos

$$\begin{aligned} 8 - z + 4 - z + z &= 1 \\ 13 &= z \end{aligned}$$

Portanto, $(x, y, z) = (4 - 13, 8 - 13, 13) = (-9, -5, 13)$.

(c) Usando a primeira e a última equação, temos $y = 3 - x$ e $z = 2 - x$. Substituindo esses valores na segunda equação, temos

$$\begin{aligned} x + 3 - x + 2 - x &= 4 \\ 1 &= x \end{aligned}$$

Portanto, $(x, y, z) = (1, 3 - 1, 2 - 1) = (1, 2, 1)$.

6. Em cada item, enumeramos sistemas intermediários equivalentes ao sistema inicial.

(a) Multiplicando a primeira equação por -3 e somando-a com a segunda equação multiplicada por 2, temos

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x - 14z = 0 \\ -x + 16z = 4 \end{cases}$$

Somando as duas últimas equações, obtemos a forma escalonada:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x - 14z = 0 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

(b) Multiplicando a terceira equação por -3 e somando-a com a segunda obtemos, após uma permutação das equações, o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 8y - 7z = -6 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por -2 e somando-a com a terceira, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 8y - 7z = -6 \\ 3y - z = 1 \end{cases}$$

Finalmente, multiplicando a segunda equação por $-3/8$ e somando-a na terceira, conseguimos o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 8y - 7z = -6 \\ \dfrac{13z}{8} = \dfrac{26}{8} \end{cases}$$

(c)

7. O sistema escalonado equivalente é

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ 5y - 5z = 5 \\ 5z = -6 \end{cases}$$

Consequentemente o sistema é possível e determinado. Usando o método da substituição, podemos encontrar a solução $x = 9/5$, $y = -1/5$ e $z = -6/5$.

8. Somando as três equações, obtemos $6x = 2$, ou seja, $x = 1/3$. Substituindo esse valor nas duas primeiras equações, obtemos

$$\begin{cases} 3y + z = 4/3 \\ -4y + z = -1/3 \end{cases}$$

Por comparação, temos $3y - 4/3 = -4y + 1/3$, ou seja, $y = 5/21$. Finalmente, $z = 4/3 - 3y = 13/21$.

9. (Extraído da FUVEST) Comparando a primeira com a última equação, concluímos que $y + z = 0$. Daí, substituindo na primeira, podemos concluir que $x = 0$. Finalmente, usando esses dois dados na segunda equação, temos $y(k-1) = 0$. Para que $(x, y, z) = (0, y, -y)$ seja uma solução própria, devemos ter $y \neq 0$. Assim, para que $y(k-1) = 0$, é necessário que $k = 1$. De fato, quando $k = 1$, $(x, y, z) = (0, 1, -1)$ é uma solução própria.

10.

11. Com o Método do Escalonamento, podemos obter o sistema equivalente

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 2 \\ 8y - z = 7 \end{cases}$$

O sistema é possível e indeterminado. Com o Método da Substituição, podemos encontrar o valor de y função de z a partir da segunda equação: $y = \dfrac{z+7}{8}$. Finalmente, substituindo esse valor na primeira equação, obtemos $x = \dfrac{5(1-z)}{8}$. Portanto,

$$(x, y, z) = (\frac{5(1-z)}{8}, \frac{z+7}{8}, z),$$

para $z \in \mathbb{R}$

12.

13. Considere a seguinte sucessão de operações na matriz completa do sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 14 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{l_1 - l_1}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 - 2l_1}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -13 & -13 \end{array}\right)$$

Assim, o sistema original é equivalente à

$$\begin{cases} x + 6y & = & 9 \\ 0x - 13y & = & -13 \end{cases}$$

14. (Extraído da AIME) Se três ou menos entradas são alteradas, ou existirão duas linhas sem entradas alteradas ou uma entrada é a única alterada em sua fila e coluna. No primeiro caso, essas duas linhas sem entradas alteradas possem a mesma soma. No segundo caso, se apenas uma entrada é a única alterada na sua linha e coluna, elas também possem a mesma soma. A matriz a seguir representa um exemplo com apenas 4 alterações e todas as 6 somas de linhas e colunas distintas.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{5} & 9 & \mathbf{7} \\ 8 & \mathbf{3} & \mathbf{9} \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Portanto, o mínimo de alterações é 4

15. O sistema dado é equivalente a

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z & = & 9 \\ 4x + 10y + 4z & = & 18 \\ 6x + 15y + 6z & = & k \end{cases}$$

Somando as duas primeiras equações e comparando com a terceira, devemos ter $9 + 18 = k$. Portanto, para que o sistema tenha solução, devemos ter $k = 27$. Para esse valor, $(x, y, z) = (1, 1, 1$ é solução do sistema.

16. Elevando a segunda equação ao quadrado e subtraindo dela a primeira, temos $2xy = 14$. Portanto $xx = 7$. Assim, x e y são raízes da equação

$$\begin{aligned} p^2 - (x+y)p + xy &= 0 \\ p^2 - 4x + 7 &= 0 \end{aligned}$$

Como $\Delta = 16 - 28 < 0$, a equação não possui raízes reais. Assim, o sistema é impossível.

17. Somando as equações, obtemos $x - z = 1$. Portanto, $x = z - 1$. Substituindo esse valor na segunda equação, obtemos $-z - 1 + y - 2z = 4$, ou seja, $y = 3z + 5$. Logo a solução geral pode ser escrita como

$$(x, y, z) = (z + 1, 3z + 5, z),$$

com $z \in \mathbb{R}$.

18. Considere a seguinte sucessão de operações na matriz completa do sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 - 2l_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -5 & -6 & -16 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 + 2l_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -1 & -8 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 + 2l_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -1 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right)$$

Assim, o sistema original é equivalente à

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 0x + y + 8z = 10 \\ 0x + 0y + 17z = 17 \end{cases}$$

Finalmente, pelo método de substituição, a solução do sistema anterior é

$$(x, y, z) = (3, 2, 1).$$

19. (Olimpíada Russa - 1946) Somando todas as equações, temos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = \frac{0}{3} = 0$. Somando agora primeira, quarta e sétima equações, obtemos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_1 = 0 + x_1 = 6 - 3 - 2 = 1$, ou seja $x_1 = 1$. De forma análoga podemos obter as demais incógnitas. $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = -4$, $x_6 = -3$, $x_7 = -2$, $x_8 = -1$.

20. Somando todas as equações, obtém-se $6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 186$, ou seja, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31$. Nota-se que a primeira equação pode ser escrita como $x_1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 + 31 = 6$, segue que $x_1 = -25$. De forma análoga, obtém-se os demais resultados pelas outras equações. Assim, $x_2 = -19$, $x_3 = -7$, $x_4 = 17$, $x_5 = 65$.

21. (Extraído da AIME) Escalonando a matriz associada ao sistema, obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + nz = 1 \\ y - n^2 z = 1 - n \\ (1 + n^3)z = 1 - n + n^2 \end{cases}$$

Para que o sistema não possua solução, uma condição necessária é que $n^3 + 1 = 0$ e $1 - n + n^2 \neq 0$, pois caso contrário poderíamos encontrar valores de z, y e x, nesta ordem, através do Método de Substituição. Como $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$, devemos ter $n = -1$. Se $n \neq -1$, usando o Método de Substituição, podemos encontrar $x = y = z = 1/(n + 1)$ como solução. Portanto, a resposta é a letra A.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com