

# Módulo de Matrizes e Sistemas Lineares

## Operações com Matrizes



## 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Se

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Encontre o valor de

- (a)  $2 \cdot A$ .
- (b)  $1/2 \cdot A$ .
- (c)  $-3 \cdot A$ .

**Exercício 2.** Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine

- a)  $A + B$ .
- b)  $A - B$ .
- c)  $A \cdot B$ .

**Exercício 3.** Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Determine o valor de  $A + B + C$ .

**Exercício 4.** Se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determine o valor de

$$I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100}.$$

**Exercício 5.** Determine os produtos de matrizes:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercício 6.** Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determine  $A^2$ .
- (b) Determine  $A^3$ .
- (c) Determine  $A^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercício 7.** Determine  $a, b, c$  e  $d$  tais que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

**Exercício 8.** Determine  $x$  e  $y$  de modo que as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} y & -1/2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

satisfaçam  $AB = BA$ .

## 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 9.** Considere as matrizes quadradas  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$  e  $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$  que satisfazem

$$a_{ij} = i^2 + j^2 \text{ e } b_{ij} = 2ij.$$

Determine a soma dos elementos da diagonal principal de  $A + B$ .

**Exercício 10.** Determine  $x$  e  $y$  de modo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 3x \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ x & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

**Exercício 11.** Determine  $x$  e  $y$  de modo que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

**Exercício 12.** Encontre uma matriz  $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ , com coeficientes reais, tal que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

**Exercício 13.** As matrizes  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$  e  $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$  satisfazem  $a_{ij} = ij$  e  $b_{ij} = \frac{j}{i}$ . Determine a matriz  $C = A \cdot B$ .

**Exercício 14.** Se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine  $A^4$ .

**Exercício 15.** Se  $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$  é uma matriz tal que  $A^2 = 0$ , determine o  $a_{11} + a_{22}$ .

**Exercício 16.** Determine o valor de  $abcd$  se as matrizes

$$\begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a-b & c-d \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

são iguais.

### 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 17.** Se

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sen \alpha \\ -\sen \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

determine  $A^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercício 18.** Prove que se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas de mesma ordem com  $AB = BA$  então

(a)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ .

(b)  $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ .

(c)  $(A + B)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^i B^{n-i}$ .

**Exercício 19.** Determine todas as matrizes com coeficientes reais que comutam com

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

**Exercício 20.** Prove que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

satisfaz a equação  $x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0$ .

**Exercício 21.** Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e o polinômio  $p(x) = x^{2016} + x^{2017}$ , determina os elementos da matriz  $p(A)$ .

**Exercício 22.** Considere a sequência de Fibonacci definida por:

$$F_0 = F_1 = 0 \text{ e } F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mostre que se  $n \in \mathbb{N}$ , então

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

## Respostas e Soluções.

1.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -18 & -12 \end{pmatrix}$$

(c)

2. Temos

$$\text{a) } A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } A - B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 14 & -10 \end{pmatrix}.$$

3. Temos

$$\begin{aligned} A + B + C &= \begin{pmatrix} 1+4+10 & 2+5+2 & 3+6+3 \\ 2+1+1 & -2+2+4 & 7+3+5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 & 9 & 12 \\ 4 & 4 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Perceba que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100} &= \\ I + A + A^2 &= \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

5.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 22 & -6 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 10 & 13 \\ 14 & -4 & -6 & -4 \\ 4 & 4 & 12 & 22 \\ -11 & 10 & 23 & 34 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.

(a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Suponha que para  $k \in \mathbb{N}$ , tenhamos

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$

7. A multiplicação das duas primeiras matrizes produz

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a-2c & 2b-2d \end{pmatrix}.$$

Portanto, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} a+2c=5 \\ b+2d=7 \\ 2a-2c=-2 \\ 2b-2d=-2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior, encontramos  $a=1$ ,  $b=5/3$ ,  $c=2$  e  $d=8/3$ .

8. Temos

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & -1/2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3y-2 & 0 \\ 4y-2x & -2+3x/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$BA = \begin{pmatrix} 3y-2 & y-x/2 \\ 0 & -2+3x/2 \end{pmatrix}.$$

Para que ocorra a igualdade, devemos ter  $4y-2x=0$  e  $y-x/2=0$ . Essas equações são equivalentes e assim para qualquer par  $(x,y)$  com  $x=2y$  ocorre a igualdade.

9. Se  $c_{ij}$  denota as entradas da matriz soma, temos

$$\begin{aligned} c_{ij} &= i^2 + j^2 + 2ij \\ &= (i+j)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c_{11} + c_{22} + c_{33} &= 2^2 + 4^2 + 6^2 \\ &= 56. \end{aligned}$$

10. A soma das matrizes é igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3x+2y \\ x+y & 4 \end{pmatrix}.$$

Para que ocorra a igualdade, devemos ter

$$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ x+y=3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior, obtemos  $x=2$  e  $y=1$ .

11. O produto das duas primeiras matrizes é

$$\begin{pmatrix} 2x+y \\ 3x+4y \end{pmatrix}.$$

Queremos que

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x+4y=7 \end{cases}$$

A solução desse sistema é  $(x,y) = (1,1)$ .

12. O produto das duas primeiras matrizes é

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} \\ a_{21} + 2a_{22} \end{pmatrix}.$$

Queremos que

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12} = 4 \\ a_{21} + 2a_{22} = 5 \end{cases}$$

Uma solução do sistema anterior é  $a_{11} = 4$  e  $a_{21} = 5$ . A solução geral é

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = (4 - 2t, t, 5 - 2k, k),$$

com  $t$  e  $k$  reais.

13. Se  $c_{ij}$  são as entradas da matriz  $C$ , então

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \\ &= i \cdot j + i \cdot j + i \cdot j \\ &= 3ij \\ &= 3a_{ij} \end{aligned}$$

Portanto,  $C = 3A$ .

14. Podemos encontrar as potências de  $A$  recursivamente

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^4 &= A^3 \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

15. Se  $c_{ij}$  denotam as entradas da matriz  $A^2$ , então

$$\begin{aligned} 0 - 0 &= c_{11} - c_{22} \\ &= a_{11}^2 - a_{22}^2 \end{aligned}$$

Portanto,  $a_{11} = \pm a_{22}$ . Se  $a_{11} = -a_{22}$ , então  $a_{11} + a_{22} = 0$ . Consideremos agora o caso  $a_{11} = a_{22}$  com  $a_{11} \neq 0$ . Analisando as entradas  $c_{12}$  e  $c_{21}$ , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= c_{12} \\ &= 2a_{11} \cdot a_{21} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= c_{21} \\ &= 2a_{11} \cdot a_{12} \end{aligned}$$

Como  $a_{11} \neq 0$ , então  $a_{12} = a_{21} = 0$ . Logo,  $A^2$  é uma matriz diagonal de entradas  $a_{11}^2$  e  $a_{22}^2 = a_{11}^2$ . Isso implica que  $a_{11} = 0$  e temos um absurdo. Consequentemente,  $a_{11} + a_{22} = 0$ .

16. Como as matrizes são iguais, podemos construir o sistema

$$\begin{pmatrix} a + b = 5 \\ c + d = 3 \\ a - b = 3 \\ c - d = -1 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema anterior, obtemos  $a = 4$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$  e  $d = 2$ . Assim,  $abcd = 8$ .

17. Suponha que dado  $k \in \mathbb{N}$  tenhamos

$$A^k = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \sin k\alpha \\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \sin k\alpha \\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\alpha & \sin(k+1)\alpha \\ -\sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$

18.

(a) Pela propriedade de distributividade e da relação  $AB = BA$ , temos

$$\begin{aligned} (A+B)(A+B) &= \\ A^2 + AB + BA + B^2 &= \\ A^2 + 2AB + B^2. & \end{aligned}$$

(b) Pela propriedade de distributividade e da relação  $AB = BA$ , temos

$$\begin{aligned} (A+B)(A-B) &= \\ A^2 + BA - AB - B^2 &= \\ A^2 - B^2. & \end{aligned}$$

(c) Suponha que para  $k \in \mathbb{N}$  tenhamos

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$$

Portanto, pela propriedade de distributividade, temos

$$\begin{aligned} (A+B)^{k+1} &= (A+B) \cdot \left( \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^{i+1} B^{k-i} + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B A^i B^{k-i} \end{aligned}$$

Como  $AB = BA$ , segue que  $BA^i B^{k-i} = A^i B^{k+1-i}$ . Além disso, pela relação de Stifel,

$$\binom{k}{l-1} + \binom{k}{l} = \binom{k+1}{l}$$

Assim, o somatório anterior pode ser reorganizado, fazendo  $i = l - 1$ , como

$$\sum_{l=0}^{k+1} \binom{k+1}{l} A^l B^{k+1-l}$$

Isso mostra que a fórmula dada também serve para  $k+1$ . Segue que valerá para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

19. Suponha que

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

comuta com  $K$ , então

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} &= TK \\ &= KT \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Uma condição necessária e suficiente para que elas comutem é que

$$\begin{cases} a = a+c \\ a+b = b+d \\ c+d = d \end{cases}$$

Portanto  $c = 0$  e  $a = d$ . Daí, as matrizes que comutam com  $K$  são as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

com  $a$  e  $b$  reais.

20.

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I &= \\ \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} ad-bc & ad-bc \\ ad-bc & ad-bc \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

21. Calculemos inicialmente as primeiras potências de  $A$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -I \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} p(A) &= A^{2016} + A^{2017} \\ &= (A^3)^{672} + (A^3)^{672} \cdot A \\ &= (-I)^{672} + (-I)^{672} \cdot A \\ &= I + A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

22. Calculemos inicialmente as primeiras potências de  $A$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -I \end{aligned}$$

Suponha que para  $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto a afirmação vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .