Equações Algébricas - Propriedades das Raízes

Equações Algébricas

3° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

Equações Algébricas - Propriedades das Raízes
Equações Algébricas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine a quantidade de raízes de cada uma das equações algébricas abaixo.

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$.

b) $x^3 - 2x + 1 = 0$.

c) $4x^5 + 2x^3 - 1 = 0$.

d) $x^{10} = 0$.

Exercício 2. Verifique se $x = 2$ é raiz das equações abaixo.

a) $x^2 + 8x - 32 = 0$.

b) $x^3 - 2x^2 = 0$.

c) $4x^5 - 2x^3 - 12 = 0$.

d) $x^{10} - 2x^9 = 0$.

Exercício 3. Uma das raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$ é:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 4. Resolva a equação $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$.

Exercício 5. Escreva uma equação algébrica de grau 3, sendo suas raízes:

a) 1, 2 e 3.

b) $1 + i$, $1 - i$ e 2.

Exercício 6. Determine o valor de a para que a equação $(a^2 - 1)x^3 + (a - 1)x^2 + 3x - 4 = 0$ tenha exatamente duas raízes.

Exercício 7. Se $x = -2$ é raiz da equação $x^3 + kx^2 - kx + 8 = 0$, então o valor de k é:

a) 0.

b) 2.

c) 4.

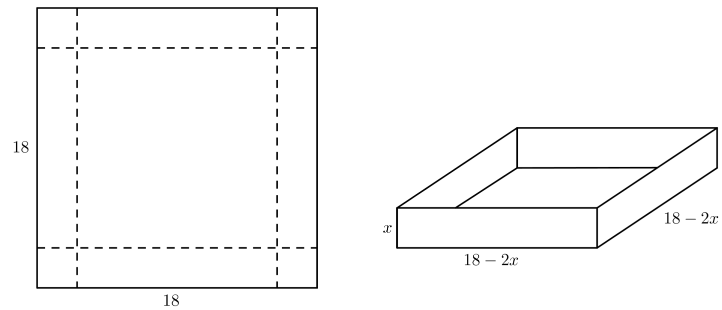
d) 6.

e) 8.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Se duas das raízes da equação $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$ são $2i$ e $-2i$, determine as demais raízes.

Exercício 9. Cortando-se quadrados de lado 4 cm em cada canto de uma folha quadrada de 18 cm de lado e dobrando conforme a figura, formamos uma caixa sem tampa cujo volume é igual a 400 cm^3. Existe algum outro valor do lado do quadrado a ser recortado em cada canto para que o volume da caixa resultante também seja igual a 400 cm^3?



Exercício 10. Se $x = 2$ é raiz da equação $3x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$, determine as demais raízes.

Exercício 11. Na equação $x^4 - 7x^3 + 10x^2 + 26x - 60 = 0$, $3 + i$ e $3 - i$ são raízes. As demais raízes são números reais?

Exercício 12. Escreva uma equação polinomial de quarto grau cujas raízes são -2, $2 + i$, $2 - i$ e 4.

Exercício 13. Se $x = 4$ é raiz da equação $4x^3 - 8x^2 - 29x + d = 0$, determine as demais raízes.

Exercício 14. A equação $x^4 + 3x^3 + cx^2 + d = 0$ possui -4 e 3 como raízes. Determine $c + d$.

Exercício 15. Determine o valor de m, de modo que $f(4) = 6$, sendo $f(x) = 3x^4 - 2mx^3 + 13x^2 - 3mx + 10$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Seja $x_1 = x_2 = 2$ raízes da equação $ax^3 + bx + 16 = 0$. Determine a e b.

Exercício 17. A equação $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$, em que m e n são números reais, admite $1 + i$ e $1 - i$ como raízes. Então, m e n valem respectivamente:

a) 2 e -2.

b) 2 e 0.

c) 0 e 2.

d) -2 e 0.

e) 2 e 2.

Exercício 18. As equações $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e $x^2 + x - 2 = 0$ têm o mesmo conjunto solução. Quais os possíveis valores de b, c e d?

Exercício 19. Uma das raízes da equação $x^3 + (m+1)x^2 + (m+9)x + 9 = 0$ é -1. Determine m para que as outras raízes sejam reais.

Exercício 20. A equação $3x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$ possui

a) três raízes imaginárias e duas raízes reais positivas.

b) pelo menos uma raiz real positiva.

c) todas as raízes inteiras.

d) uma única raiz imaginária.

e) Nenhuma das respostas anteriores.

ELABORADO POR CLEBER ASSIS E TIAGO MIRANDA
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM

Respostas e Soluções.

1.

a) 2.

b) 3.

c) 5.

d) 10.

2.

a)
$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 1 & 8 & -32 \\ \hline & 1 & 10 & \boxed{-12} \end{array}$$

$x = 2$ não é raiz da equação.

b)
$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = 2$ é raiz da equação.

c)
$$\begin{array}{c|cccccc} 2 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & -12 \\ \hline & 4 & 8 & 14 & 28 & 56 & \boxed{100} \end{array}$$

$x = 2$ não é raiz da equação.

d) $2^{10} - 2 \cdot 2^9 = 2^{10} - 2^{10} = 0$. $x = 2$ é raiz da equação.

3. Como a soma dos coeficientes da equação é zero, então 1 é raiz. Resposta A.

4. Como x é fator comum a todos os termos do primeiro membro da equação, temos $x(x^2 - 4x + 3) = 0$, donde $x = 0$ ou $x^2 - 4x + 3 = 0$. Portanto $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 3$.

5.

a) Como as raízes são 1, 2 e 3, então a equação deve ser do tipo $a(x-1)(x-2)(x-3) = 0$, sendo a um número qualquer, podendo inclusive ser imaginário. Tomando $a = 1$, por exemplo, teremos a equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

b) Utilizando o mesmo raciocínio da letra "a", temos $a[x - (1+i)][x - (1-i)](x-2) = 0$, que para $a = 1$, por exemplo, temos $(x^2 - 2x + 2)(x - 2) = x^3 - 4x^2 - 2x - 4 = 0$, ou seja, a equação $x^3 - 4x^2 - 2x - 4 = 0$ tem como raízes $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$ e $x_3 = 2$.

6. Para que uma equação tenha duas raízes, o maior expoente de x deve ser 2. Dessa forma, temos:

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ a - 1 \neq 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $a = \pm 1$ e $a \neq 1$, ou seja, para que a equação tenha grau 2, devemos ter $a = -1$.

7.

$$\begin{aligned} x^3 + kx^2 - kx + 8 &= 0 \\ (-2)^3 + k(-2)^2 - k(-2) + 8 &= 0 \\ -8 + 4k + 2k + 8 &= 0 \\ 6k &= 0 \\ k &= 0. \end{aligned}$$

Resposta A.

8. Como $x_1 = 2i$ e $x_2 = -2i$, temos:

$$\begin{array}{c|ccccc} 2i & 1 & -2 & 1 & -8 & -12 \\ \hline -2i & 1 & -2+2i & -3-4i & -6i & \boxed{0} \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

Após a divisão, utilizando as raízes conhecidas, ficamos com $x^2 - 2x - 3 = 0$, donde $x_3 = -1$ e $x_4 = 3$.

9. (Extraído da Vídeo Aula) O volume V da caixa, recortando-se quadrados de lados x, é $V = x(18 - 2x)(18 - 2x)$, ou seja, $V = 4x^3 - 72x^2 + 324x$. Como queremos verificar se existe outro valor de x que torna o volume igual a 400 cm^3, precisamos resolver a equação $4x^3 - 72x^2 + 324x = 400$, que, simplificando, ficamos com $x^3 - 18x^2 + 81x - 100 = 0$. Mas como $x = 4$ é uma solução, temos:

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -18 & 81 & -100 \\ \hline & 1 & -14 & 25 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvendo a equação $x^2 - 14x + 25 = 0$, temos $x = \dfrac{14 \pm \sqrt{96}}{2} = 7 \pm 2\sqrt{6}$. Analisando a situação problema, vemos que $0 < x < 9$, então, além de 4 cm, outro valor para os lados dos quadrados é $(7 - 2\sqrt{6})$ cm.

10. Como $x_1 = 2$ é raiz, então vamos reduzir o grau da equação:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -6 & -1 & 2 \\ \hline & 3 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Temos agora a equação $3x^2 - 1 = 0$, donde $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $x_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

11. Vamos usar $x_1 = 3 + i$ e $x_2 = 3 - i$ para reduzir o grau da equação.

$$\begin{array}{c|ccccc} 3+i & 1 & -7 & 10 & 26 & -60 \\ \hline 3-i & 1 & -4+i & -3-i & 18-6i & \boxed{0} \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

Temos agora a equação $x^2 - x - 6 = 0$, donde $x_3 = -2$ e $x_4 = 3$. Portanto, as demais raízes são reais.

12. Se -2, $2+i$, $2-i$ e 4 são raízes, então podemos escrever a equação $a(x+2)(x-4)[x-(2+i)][x-(2-i)] = 0$, sendo a um número qualquer, inclusive imaginário. Para $a = 1$, por exemplo, teremos a equação $x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 22x - 40 = 0$.

13. Como $x_1 = 4$ é raiz da equação, temos:

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 4 & -8 & -29 & d \\ \hline & 4 & 8 & 3 & \boxed{12+d} \end{array}$$

$12 + d = 0$, segue que $d = -12$. Além disso, reduzimos o grau da equação: $4x^2 + 8x + 3 = 0$, donde $x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64-48}}{8} = -1 \pm \dfrac{1}{2}$, ou seja, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ e $x_3 = -\dfrac{3}{2}$.

14. Fazendo $x = -4$ e $x = 3$, temos o sistema:

$$\begin{cases} 256 - 192 + 16c + d = 0 \\ 81 + 81 + 9c + d = 0. \end{cases}$$

Melhorando o sistema, chegamos a:

$$\begin{cases} 16c + d = -64 \\ 9c + d = -162. \end{cases}$$

Subtraindo as equações, ficamos com $7c = 98$, segue que $c = 14$ e, consequentemente, $d = -288$. Portanto $c + d = -274$.

15.

$$\begin{array}{c|ccccc} 4 & 3 & -2m & 13 & -3m & 10 \\ \hline & 3 & 12-2m & 61-8m & 244-35m & \boxed{986-140m} \end{array}$$

Temos então $986 - 140m = 6$, segue que $m = 7$.

16. (Extraído da Fuvest) Se 2 é raiz de multiplicidade 2, temos:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & a & 0 & b & 16 \\ \hline 2 & a & 2a & 4a+b & \boxed{8a+2b+16} \\ \hline & a & 4a & \boxed{12a+b} & \end{array}$$

Igualando os dois restos a zero, temos:

$$\begin{cases} 8a + 2b + 16 = 0 \\ 12a + b = 0. \end{cases}$$

Subtraindo as equações, chegamos a $a = 1$ e $b = -12$.

17. (Extraído do UFRN) Usando uma relação de *Girard*, temos $x_3(1+i) + x_3(1-i) + (1+i)(1-i) = 2$, donde $2x_3 + 2 = 2$, segue que $x_3 = 0$. Assim, $n = 0$ e, pela relação de soma das raízes (*Girard*), $(1+i) + (1-i) + 0 = -m$, segue que $m = -2$. Resposta D.

18. (Extraído da Fuvest) As raízes de $x^2 + x - 2 = 0$ são $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$. Então, a terceira raiz da equação $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, pode ser $x_3 = -2$ ou $x_3 = 1$. Para $x_3 = -2$, temos $x^3 + 3x^2 + 4 = 0$, ou seja, $b = -3$, $c = 0$ e $d = 4$; enquanto que, para $x_3 = 1$, temos $x^3 - 3x - 2 = 0$, segue que $b = 0$, $c = -3$ e $d = -2$.

19. (Extraído da Fuvest) Se -1 é raiz, então:

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & m+1 & m+9 & 9 \\ \hline & 1 & m & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

Chegamos a $x^2 + mx + 9 = 0$, sendo que estas duas últimas raízes devem ser reais, ou seja, $m^2 - 36 \geq 0$, segue que $m \leq -6$ ou $m \geq 6$.

20. (Extraído do ITA)

$$\begin{aligned} 3x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x - 1 &= 0 \\ x^4(3x-1) + x^2(3x-1) + (3x-1) &= 0 \\ (3x-1)(x^4 + x^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Do produto, concluímos que $x_1 = \dfrac{1}{3}$ e as demais raízes não são reais. Resposta B.

ELABORADO POR CLEBER ASSIS E TIAGO MIRANDA
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM