Cálculo III

Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Prof. Adriano Barbosa

TFC

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ onde } F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b \frac{dF}{dx}(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Regra da Cadeia

$f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$r(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in [a, b]$

$$f(r(t)) = f(x(t), y(t), z(y))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(r(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\, y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}\, z'(t)$$

Teorema Fundamental das Integrais de Linha

$f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$r(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
\int_C \nabla f \cdot dr &= \int_a^b \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)\,dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t))\,dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\, y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}\, z'(t)\,dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} f(r(t))\,dt \\
&= f(r(b)) - f(r(a))
\end{aligned}$$

Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Seja C uma curva suave dada pela função vetorial $r(t)$, $a \leq t \leq b$.
Se f tem gradiente contínuo em C, então

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

Exemplo

Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional $F(x, y, z) = -\frac{mMG}{|(x,y,z)|^3}(x, y, z)$ ao mover uma particula de massa m do ponto $(3, 4, 12)$ para o ponto $(2, 2, 0)$ ao longo de um caminho suave C.

$f(x, y, z) = \frac{mMG}{|(x,y,z)|}$ é tal que $\nabla f = F$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr &= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) \\
&= \frac{mMG}{\sqrt{4+4}} - \frac{mMG}{\sqrt{9+16+144}} \\
&= mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right)
\end{aligned}$$

Observação

Se F é um campo conservativo ($F = \nabla f$), então o TFIL diz que

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

Campos conservativos

Como determinar se um campo é conservativo?

Dado $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, queremos $f(x,y)$ tal que

$$F(x,y) = \nabla f(x,y)$$

$$\Rightarrow (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$\Rightarrow P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ e } Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Campos conservativos

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ e } Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ e } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Teorema

Se $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ é conservativo e P, Q têm derivadas parciais contínuas, então $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Exemplo

Determine se o campo $F(x,y) = (2x, -1)$ é conservativo.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ e } \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

logo, pelo Teorema... não podemos concluir nada!

Resolvendo o sistema $\nabla f = F$, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1 \end{cases}$$

Exemplo

Lembre que: se $F' = f$, então $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, onde C é uma constante (não depende de x).

1) Escolhemos uma das equações para resolver:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx = \int 2x\, dx \Rightarrow f(x,y) = x^2 + C(y)$$

Exemplo

2) Derivamos a função f encontrada e usamos a outra equação:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = C'(y)$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{\partial f}{\partial y} = C'(y)$$

$$\Rightarrow C(y) = -y + k$$

Assim, $f(x,y) = x^2 - y$ é uma função potencial de F e, portanto, F é conservativo.

Exercícios

1) Determine se $F(x, y) = (x - y, x - 2)$ é conservativo.

2) Encontre a função potencial de $F(x, y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$.