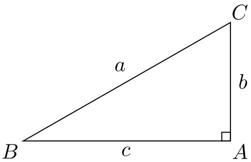
Cap. 9 – Funções trigonométricas

01/07/2022

Introdução

Num triângulo retângulo, tem-se:

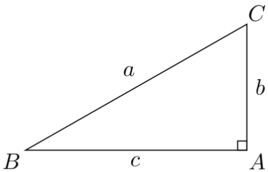


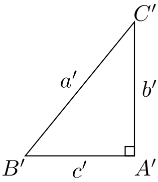
$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \qquad \cos \hat{C} = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen}\, \hat{B} = \frac{b}{a} \qquad \text{sen}\, \hat{C} = \frac{c}{a}$$

Introdução

Dados dois triângulos retângulos com um ângulo agudo $\hat{B}$ comum:





Como $\hat{B} = \hat{B}'$ e os triângulos são retângulos, tem-se $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ semalhantes. Logo

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} = \cos \hat{B}'$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \operatorname{sen} \hat{B}'$$

Assim, o valor do cosseno e do seno dependem apenas do ângulo e não do triângulo.

Introdução

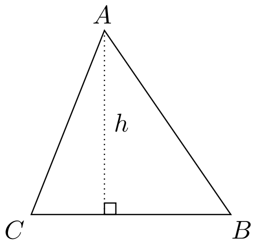
Sabendo o valor de $\cos \hat{B}$ e a medida da hipotenusa do triângulo, podemos determinar as medidas dos catetos:

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot \cos \hat{B}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Introdução

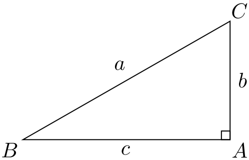
Dado um triângulo qualquer:



$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{h}{\overline{AB}} \Rightarrow h = \overline{AB} \cdot \text{sen}\,\hat{B}$$

Introdução

Voltando ao triângulo retângulo:



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 1 = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

$$\operatorname{sen}^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 1$$

Assim, tendo uma tabela de senos é possível obter os valores do cosseno e vice-versa.

Introdução

A palavra cosseno significa seno do complemento:

$$\cos \alpha = \text{sen}(90^\circ - \alpha)$$

Além disso, dado um ângulo agudo $\hat{B}$:

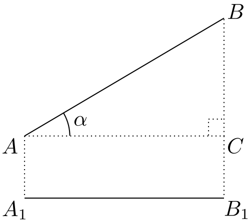
$$0 < \cos \hat{B} = \frac{b}{a} < 1$$

$$0 < \text{sen}\, \hat{B} = \frac{c}{a} < 1$$

pois $a, b, c > 0$, $b < a$ e $c < a$ (hipotenusa é o maior lado).

Introdução

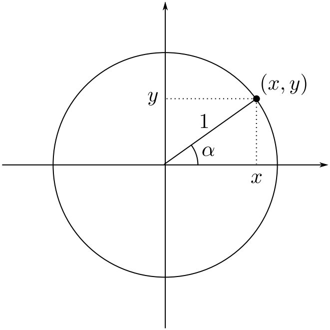
Se A_1B_1 é a projeção de AB então $\overline{A_1B_1} = \overline{AB} \cdot \cos\alpha$, onde α é o ângulo entre AB e A_1B_1. De fato,



$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{A_1B_1} = \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \cos\alpha$$

Função de Euler e medida de ângulo

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

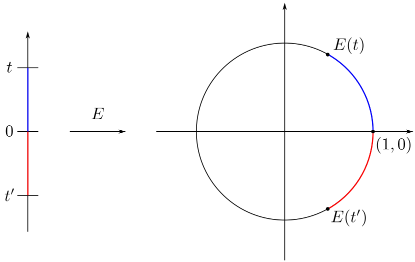


$$\begin{matrix} \operatorname{sen} \alpha = y \\ \cos \alpha = x \end{matrix} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Função de Euler e medida de ângulo

Definimos $E : \mathbb{R} \to C$ como

- $E(0) = (1, 0)$;
- Se $t > 0$, percorremos sobre C um caminho de comprimento t no sentido anti-horário. $E(t)$ é o ponto final do caminho;
- Se $t < 0$, percorremos sobre C um caminho de comprimento $|t|$ no sentido horário. $E(t)$ é o ponto final do caminho.



Função de Euler e medida de ângulo

$$E(t + 2k\pi) = E(t), \forall t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

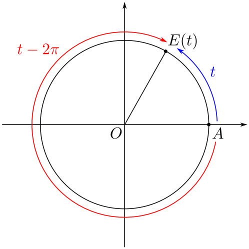
De fato, quando t descreve um intervalo de comprimento 2π (comprimento de C), sua imagem $E(t)$ dá uma volta completa sobre C.

Reciprocamente, se $t \neq t'$ e $E(t) = E(t')$, temos $t' = t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, pois $E(t) = E(t')$ significa que ao caminhar de t a t' suas imagens vão de $E(t)$ a $E(t')$ dando (pelo menos) uma volta completa em C no sentido anti-horário se $t < t'$ ou horário de $t > t'$.

Função de Euler e medida de ângulo

Pondo $A = (1,0)$, $O = (0,0)$ e $B = E(t)$, dizemos que o ângulo $A\hat{O}B$ mede t radianos. Assim:

- Para $t > 0$ o ângulo $A\hat{O}B$ tem medida positiva e se $t < 0$ o ângulo tem medida negativa (orientação);
- O ângulo $A\hat{O}B$ é bem definido a menos de um múltiplo 2π; $E(t) = E(t + 2k\pi)$, logo um ângulo de t radianos é também um ângulo de $t + 2k\pi$ radianos.



Função de Euler e medida de ângulo

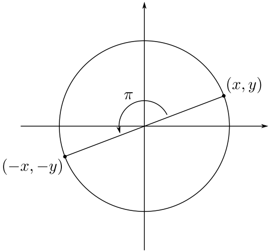
- $A\hat{O}B$ mede 1 radiano $\Leftrightarrow$ o arco $\widehat{AB}$ de C (de raio 1) tem comprimento 1. Numa circunferência de raio r, um ângulo central mede $\frac{l}{r}$ radiano quando l é o comprimento do arco submetido por esse ângulo;
- A medida de $A\hat{O}B$ em radianos pode ser dada por $\frac{2a}{r^2}$, onde a é a área do setor AOB.
  De fato, a área do setor é uma função crescente do comprimento do arco $\widehat{AB}$ e tomando $\widehat{AB'}$ n vezes maior que $\widehat{AB}$ a área do setor AOB' é n vezes maior que a área do setor AOB (são n fatias iguais a AOB, $a(nl) = na(l)$).
  Assim, pelo Teo. Fund. da Proporcionalidade, a área do setor é função linear do comprimento l do arco, $a = cl$, com c constante.
  Tomando o setor como todo o círculo de raio r, tem-se $a = \pi r^2$ e $l = 2\pi r$, logo $\pi r^2 = c2\pi r \Rightarrow c = \frac{r}{2} \therefore a = \frac{r}{2}l$.
  Assim, $\frac{l}{r} = \frac{2a}{r^2}$.

Função de Euler e medida de ângulo

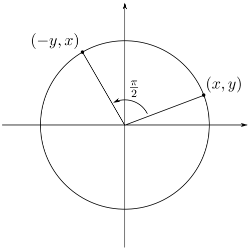
Dizemos que o ângulo $A\hat{O}B$ mede s graus quando o arco $\widehat{AB}$ mede $\frac{2\pi}{360}s$ radianos. Assim, como a circunferência unitária mede 2π, temos que sua medida em graus é $360 \Rightarrow 2\pi$ rad $= 360^\circ$.

Função de Euler e medida de ângulo

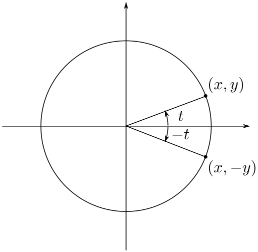
Simetrias da função $E(t)$:



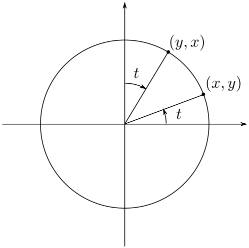
$E(t + \pi) = (-x, -y)$



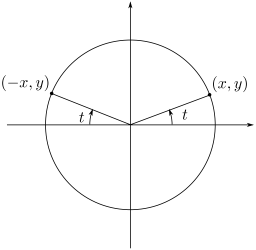
$E\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = (-y, x)$



$E(-t) = (x, -y)$



$E\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = (y, x)$



$E(\pi - t) = (-x, y)$

Funções trigonométricas

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica se existe $T \neq 0$ tal que

$$f(t+T) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

O menor $T > 0$ é dito período de f.

Observe que,

$$f(t+kT) = f(t+(k-1)T+T) = f(t+(k-1)T) = f(t+(k-2)T+T)$$

$$= f(t+(k-2)T) = \cdots = f(t+T) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

Dizemos que f é par se $f(-t) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$, e ímpar se $f(-t) = -f(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

Funções trigonométricas

Definimos $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo $E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$E(t) = E(t+2\pi) \Rightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t) = (\cos(t+2\pi), \operatorname{sen}(t+2\pi)), \forall t \in \mathbb{R}$

Logo, sen e cos são periódicas de período 2π.

Além disso,

$$E(t) = (x, y) \Rightarrow E(-t) = (x, -y)$$

$E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \Rightarrow E(-t) = (\cos(-t), \operatorname{sen}(-t)) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$

$$\therefore \cos \text{ é par e } \operatorname{sen} \text{ é ímpar.}$$

Funções trigonométricas

Mais ainda,

$$\begin{aligned} \cos(t+\pi) &= -\cos t, & \operatorname{sen}(t+\pi) &= -\operatorname{sen} t \\ \cos(t+\tfrac{\pi}{2}) &= -\operatorname{sen} t, & \operatorname{sen}(t+\tfrac{\pi}{2}) &= \cos t \\ \cos(\tfrac{\pi}{2}-t) &= \operatorname{sen} t, & \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}-t) &= \cos t \\ \cos(\pi-t) &= -\cos t, & \operatorname{sen}(\pi-t) &= \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

$$\cos t = 0 \Leftrightarrow E(t) = (0,y) \Leftrightarrow t = (2k+1)\frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sen} t = 0 \Leftrightarrow E(t) = (x,0) \Leftrightarrow t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Funções trigonométricas

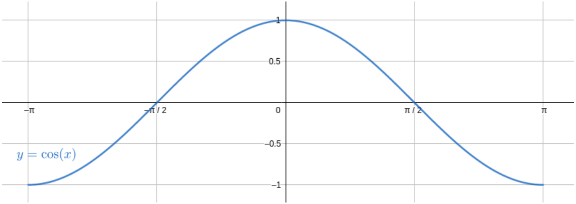


Figura: Gráfico da função cos.

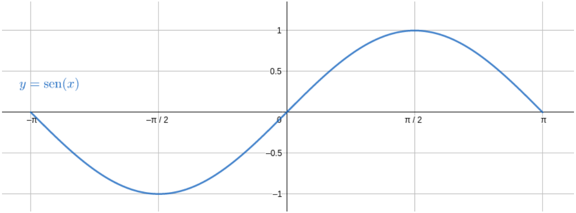


Figura: Gráfico da função sen.

Funções trigonométricas

Podemos definir:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\operatorname{cotg} t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

$$\operatorname{cossec} t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

Funções trigonométricas

A função tangente só está definida nos intervalos da forma $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

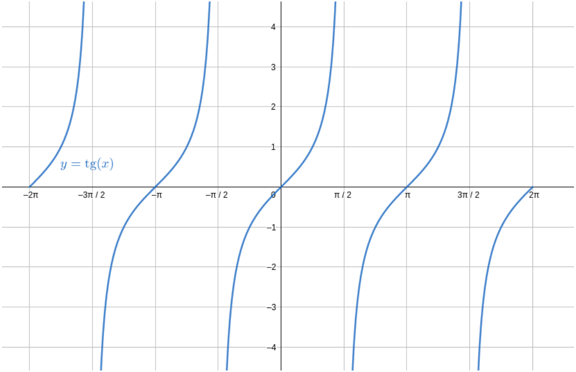


Figura: Gráfico da função tg.

Funções trigonométricas

Além disso,

$$\operatorname{tg}(t+\pi) = \operatorname{tg} t, \forall t \in D$$

e

$\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ é crescente, pois dados $x < y$,

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \frac{\operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x}{\cos x \cos y} = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x \cos y}$$

onde, $\cos x \cos y > 0$ e $\operatorname{sen}(x-y) < 0$, pois $x - y < 0$.
$\Rightarrow \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y < 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x < \operatorname{tg} y$.

Funções trigonométricas

Mais ainda, tg é injetiva. De fato,

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} \Rightarrow \underbrace{\operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x}_{\operatorname{sen}(x-y)} = 0$$

$$\Rightarrow x - y = k\pi, \ \ x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = y$$

Funções trigonométricas

Por fim, tg é ilimitada, pois

$$\cos x \to 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \to \pm 1$$

Portanto, $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ é uma bijeção.

A inversa de tg é $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

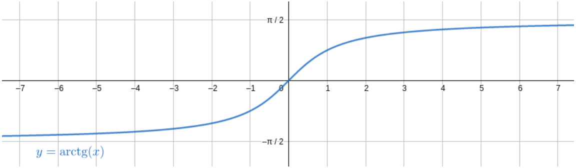
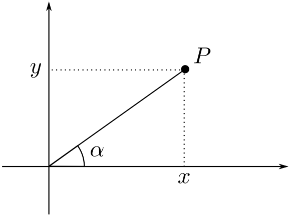


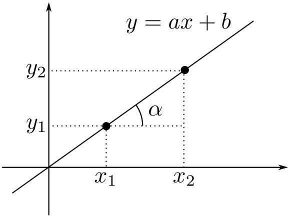
Figura: Gráfico da função arco tangente.

Funções trigonométricas

Dado $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $x \neq 0$, então $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$.

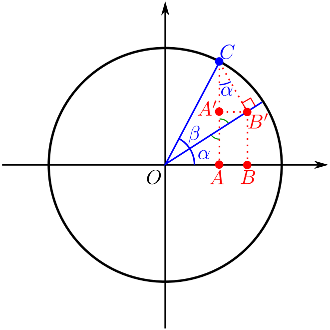


Dados $x_1 \neq x_2$ com $y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha$.



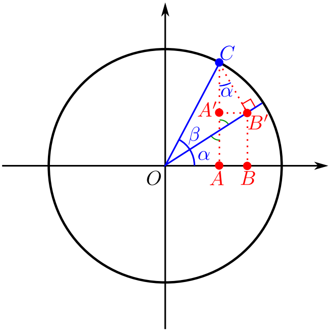
Fórmulas de adição

Vamos supor $0 < \alpha, \beta, \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$:



Dados ângulos α, β:
Tome B' tal que $OB' \perp CB'$, B a projeção de B' em OX, A a projeção de C em OX e A' tal que $A'B' // OX$.
Os ângulos são opostos pelo vértice, logo $A\hat{C}B' = \alpha$.

Fórmulas de adição



$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OA}{1} \Rightarrow OA = \cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos\beta = \frac{OB'}{1} \Rightarrow OB' = \cos\beta$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{CB'}{1} \Rightarrow CB' = \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{OB}{OB'} = \frac{OB}{\cos\beta} \Rightarrow OB = \cos\alpha\cos\beta$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{A'B'}{CB'} = \frac{A'B'}{\operatorname{sen}\beta}$$

$$\Rightarrow AB = A'B' = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = OA = OB - AB = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\therefore \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Fórmulas de adição

Analogamente,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Como $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\operatorname{sen} t$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$, temos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\beta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{sen}\beta$$

$$= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\therefore \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

Fórmulas de adição

Analogamente,

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}(-\beta)\cos\alpha$$

$$\therefore \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

Assim,

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha$$

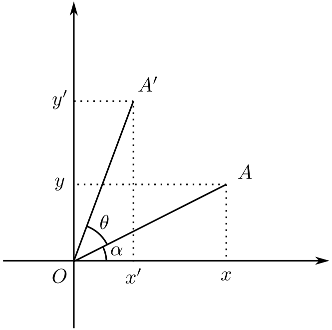
$$\Rightarrow \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Fórmulas de adição

Exemplo: Rotação em torno da origem.



$$r = OA, A = (x, y), A' = (x', y')$$

$$x = r\cos\alpha, y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$x' = r\cos(\alpha+\theta), y' = r\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x' = r\cos\alpha\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' = r\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\alpha = y\cos\theta + x\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}$$

$$\therefore T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$$

Fórmulas de adição

Exemplo: $\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2 = 1$

De fato,

$$(1-x^2)^2 + (2x)^2 = 1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$$

Assim, $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ e $\frac{2x}{1+x^2}$ são coordenadas de pontos na circunferência unitária, ou seja, são seno e coseno de algum ângulo β.
Como todo $x \in \mathbb{R}$ é tangente de algum $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\cos\beta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Fórmulas de adição

Mostremos que $\beta = 2\alpha$. Fazendo $x = \operatorname{tg}\alpha$:

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha+1-\cos^2\alpha} = \cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha = \cos(2\alpha)$$

e

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha)$$

Fórmulas de adição

Logo,

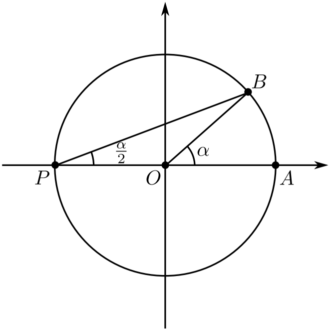
$$\cos(2\alpha) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Equivalentemente,

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Fórmulas de adição

O último exemplo nos permite parametrizar C:

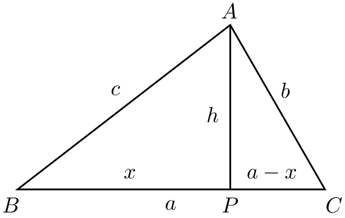


Se $A\hat{O}B = \alpha$ então $A\hat{P}B = \frac{\alpha}{2}$, pois o ângulo inscrito mede metade do ângulo central submetidos a um mesmo arco $\widehat{AB}$.

Logo, $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é a inclinação da reta PB. Variando $\frac{\alpha}{2}$ em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e mantendo $P = (-1, 0)$ fixo, cada semi-reta partindo de P com inclinação $\frac{\alpha}{2}$ toca C num único ponto $B = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

Portanto, $x \mapsto \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right)$ atinge todos os pontos de $C - \{P\}$.

Lei dos cossenos e lei dos senos

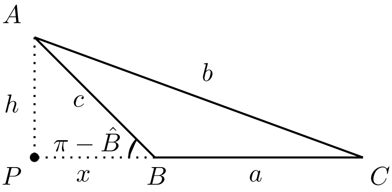


$$\cos \hat{B} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cos \hat{B}$$

$$\triangle ABP : c^2 = h^2 + x^2$$

$$\triangle APC : b^2 = (a - x)^2 + h^2$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 - 2ax + \underbrace{x^2 + h^2}_{c^2}$$



$$\cos(\pi - \hat{B}) = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cos(\pi - \hat{B})$$

$$\Rightarrow x = -c \cos \hat{B}$$

$$\triangle ABP : c^2 = h^2 + x^2$$

$$\triangle APC : b^2 = (a + x)^2 + h^2$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 + 2ax + \underbrace{x^2 + h^2}_{c^2}$$

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

Lei dos cossenos e lei dos senos

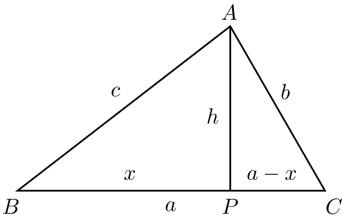
De modo análogo,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

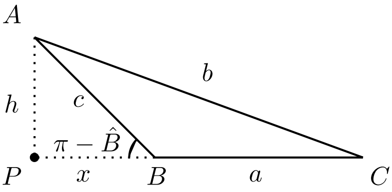
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

Lei dos cossenos e lei dos senos



$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \operatorname{sen}\hat{B}$$

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \operatorname{sen}\hat{C}$$



$$\operatorname{sen}(\pi - \hat{B}) = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \operatorname{sen}(\pi - \hat{B})$$

$$\Rightarrow h = c \operatorname{sen}\hat{B}$$

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \operatorname{sen}\hat{C}$$

$$\therefore c \operatorname{sen}\hat{B} = b \operatorname{sen}\hat{C}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$$

Lei dos cossenos e lei dos senos

Analogamente,

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

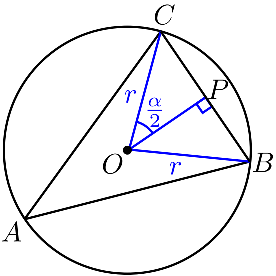
$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$$

Portanto,

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Lei dos cossenos e lei dos senos

Tomando o círculo circunscrito ao $\triangle ABC$:



$\triangle OBC$ é isosceles

$\Rightarrow OP$ é bissetriz de $\alpha = C\hat{O}B = 2\hat{A}$

$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{\alpha}{2} = C\hat{O}P$$

$$\therefore \text{sen}\,\hat{A} = \text{sen}\,C\hat{O}P = \frac{\frac{a}{2}}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = r\,\text{sen}\,\hat{A}$$

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2r = \text{diâmetro}$$

Lei dos cossenos e lei dos senos

Exemplo: Dados a, b, c, determine $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Analogamente para $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Lei dos cossenos e lei dos senos

Exemplo: Dados a, b e $\hat{C}$, determinar $c, \hat{B}$ e $\hat{A}$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}}$$

Determina-se $\hat{B}$ e $\hat{A}$ como no exemplo anterior.

Lei dos cossenos e lei dos senos

Exemplo: Dados $\hat{A}$, $\hat{B}$ e c, encontrar a, b e $\hat{C}$.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \Rightarrow \hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B}$$

$$\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{c \,\text{sen } \hat{A}}{\text{sen } \hat{C}} \quad \text{e} \quad b = \frac{c \,\text{sen } \hat{B}}{\text{sen } \hat{C}}$$

Lei dos cossenos e lei dos senos

Exemplo: Dados $a > b$ e $\hat{A}$, encontre $c, \hat{B}$ e $\hat{C}$.

Como $a > b$, $\hat{A} > \hat{B}$, pois o ângulo oposto ao maior lado é o maior ângulo. Logo, $\hat{B}$ deve ser agudo, caso contrário, teríamos dois ângulos obtusos num triângulo.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b \operatorname{sen} \hat{A}}{a}$$

e

$$\frac{b}{a} < 1 \Rightarrow 0 < \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} \operatorname{sen} \hat{A} < 1, \ (0 < \hat{A} < \pi \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} > 0).$$

Logo, existe um único ângulo agudo $\hat{B}$ cujo seno é igual a $\frac{b}{a} \operatorname{sen} \hat{A}$.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \Rightarrow \hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}}$$