Cap. 8 – Funções exponenciais e logarítmicas
Parte 2

24/06/2022

Caracterização das funções logarítmicas

Teorema: Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ monótona injetiva tal que $f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$. Existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Caracterização das funções logarítmicas

Teorema: Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ monótona injetiva tal que $f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$. Existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Prova: Provemos para f crescente (o caso decrescente é análogo). Temos

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$$

Suponha que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$ (mostraremos que isso sempre acontece depois).
Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se $a > 1$.

Caracterização das funções logarítmicas

Para todo $m \in \mathbb{N}$

$$f(a^m) = f(\underbrace{a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ vezes}}) = \underbrace{f(a) + \cdots + f(a)}_{m \text{ vezes}} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{m \text{ vezes}} = m$$

e

$$0 = f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m})$$

$$\Rightarrow f(a^{-m}) = -m.$$

Se $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ então $rn = m$ e

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = f(\overbrace{a^r \cdot \cdots \cdot a^r}^{n \text{ vezes}})$$

$$= \underbrace{f(a^r) + \cdots + f(a^r)}_{n \text{ vezes}} = n \cdot f(a^r) \Rightarrow f(a^r) = \frac{m}{n} = r.$$

Caracterização das funções logarítmicas

Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então para $r, s \in \mathbb{Q}$ tem-se:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s)$$

$$\Rightarrow r < f(a^x) < s$$

Assim todo racional r menor do que x é também menor do que $f(a^x)$ e todo racional s maior do que x é também maior do que $f(a^x)$.
Segue-se que $f(a^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Portanto, $f(y) = \log_a y, \forall y > 0$.

Caracterização das funções logarítmicas

Considere o caso geral, onde $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é crescente tal que $g(xy) = g(x) + g(y)$. Então $g(1) = 0$ e como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$.
A nova função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$ é crescente, transforma somas em produtos e $f(2) = 1$.
Logo, pela primeira parte, tem-se $f(x) = \log_2 x, \forall x > 0$.
Assim,

$$x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{g(x)}{b}} = \left(2^{\frac{1}{b}}\right)^{g(x)} = a^{g(x)}, \forall x > 0 \text{ e } a = 2^{\frac{1}{b}}$$

$$\Rightarrow g(x) = \log_a x$$

Logaritmos naturais

Dado $k > 0$, seja $T_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_k(x, y) = \left(kx, \frac{y}{k}\right)$

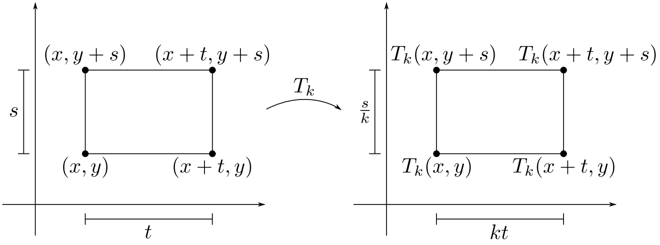
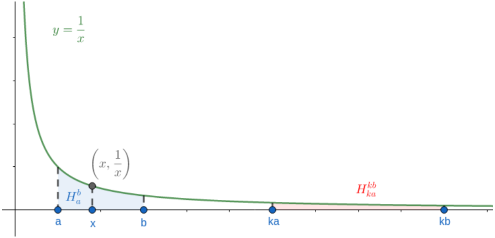


Figura: Transformação linear que preserva área.

$$T_k(x, y) = \left(kx, \frac{y}{k}\right)$$
$$T_k(x+t, y) = \left(k(x+t), \frac{y}{k}\right)$$
$$T_k(x+t, y+s) = \left(k(x+t), \frac{y+s}{k}\right)$$
$$T_k(x, y+s) = \left(kx, \frac{y+s}{k}\right)$$
$$\text{área}(R) = t \cdot s$$
$$\text{área}(T_k(R)) = (k(x+t) - kx) \cdot \left(\frac{y+s}{k} - \frac{y}{k}\right) = kt \cdot \frac{s}{k} = t \cdot s$$

Logaritmos naturais

Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, o conjunto H_a^b dos pontos (x, y) tais que $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ é chamado faixa de hipérbole.



$$T_k\left(x, \tfrac{1}{x}\right) = \left(kx, \tfrac{1}{kx}\right)$$
$$T_k\left(H_a^b\right) = H_{ka}^{kb}$$
$$\text{área}\left(H_a^b\right) = \text{área}\left(H_{ka}^{kb}\right)$$

Logaritmos naturais

ÁREA(X) é a área orientada ("área com sinal"):

$$\text{ÁREA}\left(H_a^b\right) = \begin{cases} \text{área}\left(H_a^b\right), & \text{se } a < b \\ -\text{área}\left(H_a^b\right), & \text{se } a > b \end{cases}$$

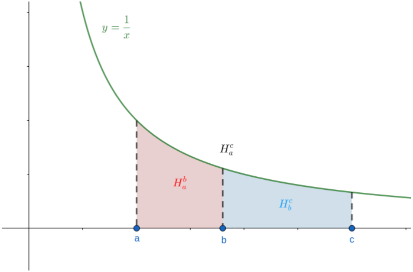
$$\text{ÁREA}\left(H_a^a\right) = 0$$

$$\text{ÁREA}\left(H_a^b\right) = -\text{ÁREA}\left(H_b^a\right)$$

Logaritmos naturais

Observações:

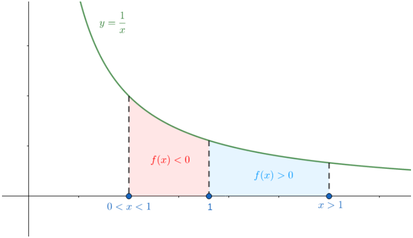
- Se $a < b < c$ então área $\left(H_a^b\right)$ + área $\left(H_b^c\right)$ = área $\left(H_a^c\right)$



- ÁREA $\left(H_a^b\right)$ + ÁREA $\left(H_b^c\right)$ = ÁREA $\left(H_a^c\right), \forall a, b, c \in \mathbb{R}^+$
  Basta considerar os 6 casos.

Logaritmos naturais

Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \text{ÁREA}\left(H_1^x\right)$



$$f(xy) = \text{ÁREA}\left(H_1^{xy}\right) = \text{ÁREA}\left(H_1^x\right) + \text{ÁREA}\left(H_x^{xy}\right)$$
$$= \text{ÁREA}\left(H_1^x\right) + \text{ÁREA}\left(H_1^y\right) = f(x) + f(y).$$

Logo, pelo Teo. de Caracterização, existe um real positivo, digamos e, tal que $f(x) = \log_e x, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

$\text{área}\left(H_a^b\right) = \text{área}\left(H_{ka}^{kb}\right)$

Logaritmos naturais

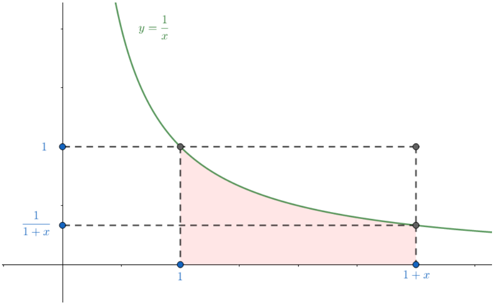
Escrevemos $\ln x$ ao invés de $\log_e x$ e chamamos de logaritmo natural.
e é uma constante irracional caracterizada por $\text{ÁREA}\,(H_1^e) = 1$.

$$e \approx 2,71828182\ldots$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e$$

Logaritmos naturais

Mostremos que o número e do limite é o mesmo e da base do logaritmo natural:



$$x \cdot \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) < x \cdot 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

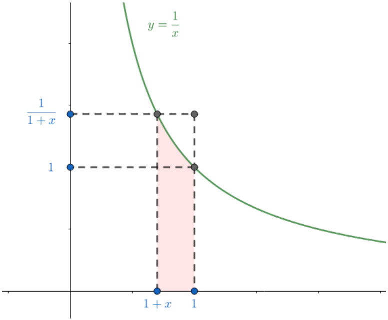
$$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{n}} < \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{n}} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Logaritmos naturais



$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < 1 \Rightarrow 0 < 1{+}x$$

$$-x{\cdot}1 < -\ln(1{+}x) < -x{\cdot}\frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow 1 < \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow e < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e^{\frac{1}{1+x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Logaritmos naturais

Assim,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

e

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Logaritmos naturais

Tomando $x = \frac{\alpha}{n}$, temos $x \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$ e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^\alpha = \lim_{n\to\infty}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^\alpha = e^\alpha$$

A exponencial de base e

c_0 : capital inicial
α : taxa de juros

$c_0 \xrightarrow{\text{1 ano}} c_0(1+\alpha)$ (juros simples)

Resgatando e reinvestindo:
$c_0 \xrightarrow{\text{6 meses}} c_0\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \xrightarrow{\text{6 meses}} c_0\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) = c_0\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2$
e por Bernoulli, $\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2 > 1+2\frac{\alpha}{2} = 1+\alpha$

Repetindo com intervalos de 1 mês:
$c_0 \xrightarrow{\text{1 mês}} c_0\left(1+\frac{\alpha}{12}\right) \xrightarrow{\text{1 mês}} \cdots \xrightarrow{\text{1 mês}} c_0\left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^{12}$
e $\left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^{12} > \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2 > 1+\alpha$

A exponencial de base e

Repetindo com intervalos de tempo cada vez menores:

$$c_0 \longrightarrow c_0 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = c_0 e^{\alpha}$$

O mesmo capital c_0 aplicado por $t > 0$ anos a uma mesma taxa α:

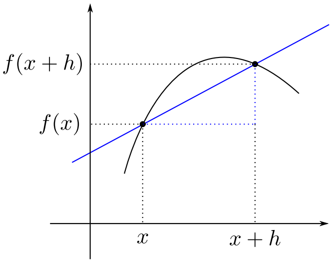
$$c_0 \xrightarrow{t \text{ anos}} c_0(1 + t\alpha) \text{ (juros simples)}$$

$$c_0 \xrightarrow{\text{reinvestindo}} c_0 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha t}{n}\right)^n = c_0 e^{\alpha t} \text{ (juros compostos)}$$

$$\therefore f(t) = c_0 e^{\alpha t} = \underbrace{c_0 a^t}_{(a = e^{\alpha})} = \underbrace{c_0 b^{\beta t}}_{\left(b = e^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}$$

Taxa de crescimento

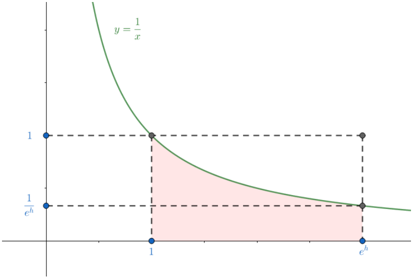
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ é a taxa de crescimento de } f \text{ em } [x, x+h]$$



Para $f(x) = be^{\alpha x}$:

$$\frac{be^{\alpha(x+h)} - be^{\alpha x}}{h} = \frac{be^{\alpha x}e^{\alpha h} - be^{\alpha x}}{h} = \underbrace{be^{\alpha x}}_{f(x)} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = f(x)\frac{e^{\alpha h} - 1}{h}$$

Taxa de crescimento



$$(e^h - 1)\frac{1}{e^h} < \ln e^h < (e^h - 1) \cdot 1$$

$$\Rightarrow \frac{e^h - 1}{e^h} < h < e^h - 1 \Rightarrow \frac{1}{e^h} < \frac{h}{e^h - 1} < 1 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{h}{e^h - 1} = 1$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\frac{h}{e^h - 1}} = 1$$

Taxa de crescimento

Assim,

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha(x+h)} - e^{\alpha x}}{h} = \alpha e^{\alpha x} \lim_{\alpha h \to 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h} = \alpha e^{\alpha x}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}\right) = \alpha e^{\alpha x},$$

ou seja, são proporcionais.