Funções trigonométricas

Resumo adaptado do livro: Lima, E. L. *Números e Funções Reais.* SBM. 2013.

1 Introdução

As funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, principalmente por suas aplicações, que vão desde as mais elementares, dia a dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta Tecnologia.

Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso são especialmente adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais abundam no universo: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc.

Como se sabe desde o Ensino Fundamental, num triângulo retângulo de hipotenusa a e ângulos agudos $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, opostos respectivamente aos catetos b e c, têm-se as definições:

$$\cos\widehat{B} = \frac{c}{a} = (\text{cateto adjacente}) \div (\text{hipotenusa}),$$

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{b}{a} = (\text{cateto oposto}) \div (\text{hipotenusa}),$$

e, analogamente, $\cos\widehat{C} = \dfrac{b}{a}, \operatorname{sen}\widehat{C} = \dfrac{c}{a}$.

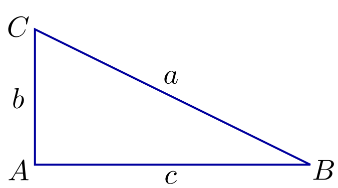

Figura 1: Triângulo retângulo ABC.

Estas relações definem o seno e o cosseno de um ângulo agudo qualquer, pois todo ângulo agudo é um dos ângulos de um triângulo retângulo. É fundamental observar que $\cos\widehat{B}$ e $\operatorname{sen}\widehat{B}$ dependem apenas do ângulo $\widehat{B}$ mas não do tamanho do triângulo retângulo do qual $\widehat{B}$ é um dos ângulos agudos.

Se organizarmos uma tabela com os valores de $\cos\widehat{B}$ para todos os ângulos agudos $\widehat{B}$, a relação $c = a\cos\widehat{B}$ e o Teorema de Pitágoras

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

nos permitirão determinar os catetos b, c de um triângulo retângulo, uma vez conhecida a hipotenusa a e um dos ângulos agudos.

Mais geralmente, num triângulo ABC qualquer, a altura h, baixada do vértice C sobre o lado AB, tem a expressão $h = \overline{BC}\operatorname{sen}\widehat{B}$.

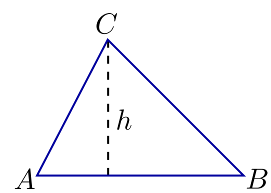

Figura 2: Triângulo ABC.

O Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

aplicado ao triângulo retângulo ABC da Figura 1 nos mostra imediatamente que

$$\left(\cos\widehat{B}\right)^2 + \left(\operatorname{sen}\widehat{B}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

É um costume tradicional, que convém adotar, escrever $\cos^2\widehat{B}$ e $\operatorname{sen}^2\widehat{B}$ em vez de $\left(\cos\widehat{B}\right)^2$ e $\left(\operatorname{sen}\widehat{B}\right)^2$. A relação fundamental

$$\cos^2\widehat{B} + \operatorname{sen}^2\widehat{B} = 1$$

mostra que, a rigor, basta construir uma tabela de senos para ter a de cossenos, ou vice-versa.

2 As Funções Trigonométricas

Indicaremos com a notação C a circunferência de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$, que chamaremos de *círculo unitário*. Temos, portanto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Observa-se que, para todo ponto $(x, y) \in C$ tem-se $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

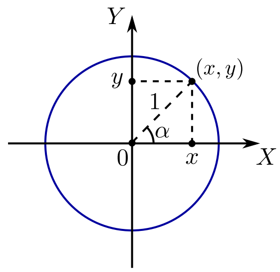

Figura 3: Círculo unitário.

As funções $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamadas *função cosseno* e *função seno* respectivamente, são definidas pondo-se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (ângulo em radianos), $x = \cos\alpha$ e $y = \operatorname{sen}\alpha$.

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *periódica* quando existe um número $T \neq 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se isto ocorre, então $f(t + kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $T > 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ chama-se *período* da função f. As funções seno e cosseno são periódicas, de período 2π.

Diz-se ainda que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *par* quando se tem $f(-t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Quando se tem $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, a função f chama-se *ímpar*.

Exemplo 2.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função *dente-de-serra*, assim definida: $f(k) = 0$ se $k \in \mathbb{Z}$ e $f(k+\alpha) = \alpha$ quando $0 \leqslant \alpha < 1$ e $k \in \mathbb{Z}$. A função f é periódica, com período 1, mas não é par nem ímpar. Por outro lado, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $g(t) = t^n$ (com $n \in \mathbb{N}$) é par se n é um número par e é uma função ímpar quando n é um número ímpar.

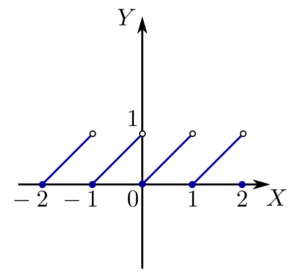

Figura 4: Função dente-de-serra.

Por conta da simetria do círculo unitário, é possível observar que:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \text{ e } \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, \ \forall\alpha \in \mathbb{R}.$$

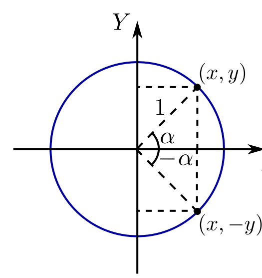

Figura 5: Simetria do círculo unitário.

Assim, cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar. De modo análogo, as relações abaixo também podem ser observadas para todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha, \ \operatorname{sen}(\alpha + \pi) = -\operatorname{sen}\alpha,$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\alpha, \ \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha, \ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \ \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha.$$

As Figuras 6 e 7 mostram os gráficos de $y = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$.

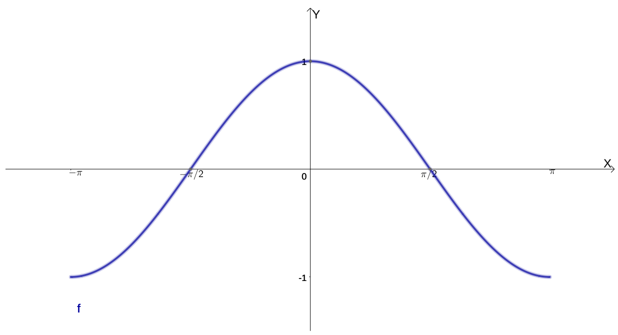

Figura 6: Gráfico da função cosseno.

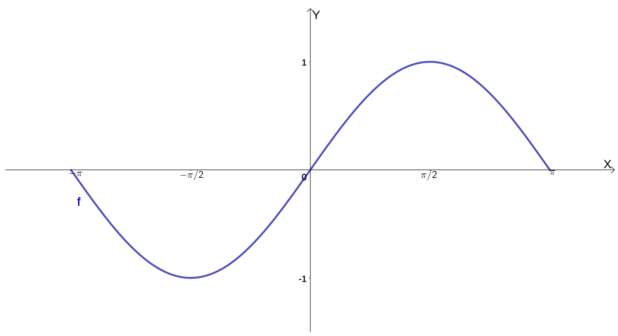

Figura 7: Gráfico da função seno.

Alguns valores particulares das funções seno e cosseno podem ser obtidos mediante argumentos geométricos especialmente quando se usam as fórmulas de adição, que estabeleceremos a seguir. Do ponto de vista numérico, entretanto, é claro que o modo mais eficiente de obter os valores dessas funções é usar uma calculadora, principalmente uma que opere com radianos e com graus.

Independente de calculadoras, é muito conveniente que se saiba, sem pensar muito, quais os valores de x que satisfazem as equações

$$\operatorname{sen} x = 0, \cos x = 0,$$

$$\operatorname{sen} x = 1, \cos x = 1,$$

$$\operatorname{sen} x = -1, \cos x = -1,$$

$$\operatorname{sen} x = \cos x,$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}, \cos x = \frac{1}{2}$$

e outras semelhantes.

Das funções seno e cosseno derivam as outras funções trigonométricas, a saber

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ e } \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Destas funções (chamadas tangente, cotangente, secante e cossecante), a mais importante é a primeira. Cumpre observar que tais funções, sendo definidas por meio de quocientes, têm seus domínios restritos aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero.

Assim, por exemplo, a função tangente, dada pela expressão $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, tem como domínio o conjunto dos números reais que não são múltiplos ímpares de $\frac{\pi}{2}$ pois $\cos x = 0$ se, e somente se, $x = (2k+1)\frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, o domínio da função $x \mapsto \operatorname{tg} x$ é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre um intervalo aberto de comprimento π e a reta real $\mathbb{R}$.

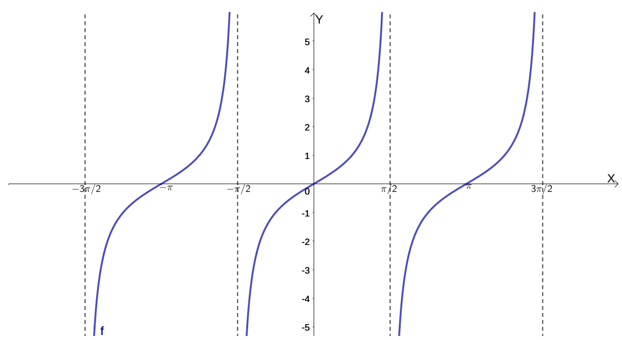

Figura 8: Gráfico da função tangente.

A função tangente, embora não esteja definida para todo número real $\mathbb{R}$, pode ser considerada como uma função periódica, de período π, pois π é o menor número real positivo tal que $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$ se x e $x+\pi$ pertencem ao domínio da função.

A restrição da função tangente ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, sendo uma correspondência biunívoca $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, possui uma função inversa, chamada *arco tangente*, indicada com a notação $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to$

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, a qual é uma correspondência biunívoca de domínio $\mathbb{R}$ e imagem igual ao intervalo aberto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

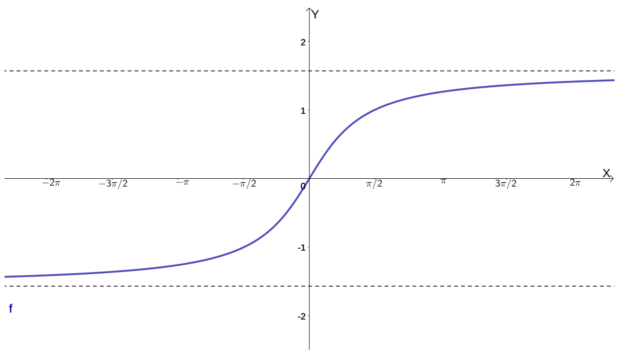

Figura 9: Gráfico da função arco tangente.

3 As Fórmulas de Adição

As fórmulas clássicas que exprimem $\cos(\alpha+\beta)$ e $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ em termos de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{sen}\beta$ podem ser demonstradas de vários modos. Para uma demonstração da equação (1), vide o livro “Números e Funções Reais”.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta. \qquad (1)$$

Tomando $-\beta$ em vez de β na equação (1), como $\cos(-\beta) = \cos\beta$ e $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$, obtemos:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.$$

Além disso, como

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = \cos t$$

e

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = -\operatorname{sen} t,$$

a equação (1) nos dá também:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right)\\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\beta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{sen}\beta,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha.$$

Daí resulta imediatamente que

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha.$$

As fórmulas para o seno e o cosseno do arco duplo são consequências diretas:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

e

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha.$$

Como aplicação das fórmulas de adição, mostraremos como determinar as coordenadas do ponto $A' = (x', y')$, obtido do ponto $A = (x, y)$ por meio da rotação de ângulo θ em torno da origem de $\mathbb{R}^2$.

Chamemos de α o ângulo do eixo OX com o segmento OA e escrevamos $r = \overline{OA}$. Então $r = \overline{OA'}$ e se tem

$$x = r\cdot\cos\alpha,\ y = r\cdot\operatorname{sen}\alpha,$$
$$x' = r\cdot\cos(\alpha+\theta),\ y' = r\cdot\operatorname{sen}(\alpha+\theta).$$

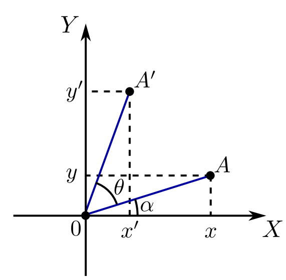

Figura 10: Rotação de ângulo θ em torno da origem de $\mathbb{R}^2$.

As fórmulas de adição fornecem

$$x' = r\cos\alpha\cdot\cos\theta - r\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta,$$

$$y' = r\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta + r\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\theta = x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta.$$

Portanto, a rotação de ângulo θ em torno da origem é uma função (transformação) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta).$$