Material Teórico - Módulo de Função Exponencial

Funções Exponenciais e Suas Propriedades

Primeiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de outubro de 2018

Nesta aula, começaremos a estudar uma das funções mais importantes da Matemática, a função *exponencial*. Tentaremos apresentar, na medida do possível, uma abordagem rigorosa, o que nos obrigará a citar, de modo informal, alguns resultados importantes do Cálculo, como a noção de continuidade e uma versão intuitiva da noção de derivada, vista como *taxa de variação* de uma função.

1 Dois exemplos

Nesta seção, veremos dois exemplos em que a função que controla um determinado fenômeno natural satisfaz uma identidade específica, cujas consequências estudaremos na seção posterior.

Exemplo 1. *Em uma cultura de bactérias, uma população inicial de uma unidade (que geralmente é medida em milhares de indivíduos) aumenta com o tempo. Denotamos por $P(t)$ a população resultante dessa unidade populacional após um tempo t. Se supusermos que há uma quantidade ilimitada de nutrientes, de modo que essa população cresça sem restrições, que informações podemos obter sobre a função P?*

Como há uma quantidade ilimitada de alimento, o aumento de população não provoca competição entre as bactérias, logo, não retarda o crescimento da população. Disso, podemos concluir que o tamanho da colônia de bactérias é proporcional à sua população inicial. Portanto, se essa população inicial consistir de p_0 unidades, então, após um tempo t, teremos uma população de $p_0P(t)$ unidades.

Passado um tempo $t + s$, a população unitária inicial aumenta para $P(t + s)$. Por outro lado, podemos dividir esse intervalo de tempo em dois intervalos menores: do início até o instante t, a população aumenta de 1 para $P(t)$ unidades; do instante t até o instante $t + s$, a população aumenta de $p_0 = P(t)$ para $p_0P(s) = P(t)P(s)$.

Dessa forma, a função P satisfaz a identidade

$$P(t + s) = P(t)P(s),$$

para todos $s, t \geq 0$.

Exemplo 2. *Elementos radioativos mudam com o tempo, transformando-se em outros elementos. Assim, a massa de uma determinada quantidade de material radioativo diminui com o tempo. Denotemos por $M(t)$ a massa de um determinado material radioativo que resta, após um tempo t, pela transmutação de uma quantidade inicial de 1 unidade de massa.*

Supondo que os átomos desse material não exerçam influência uns sobre os outros, podemos concluir que a quantidade restante no instante t é proporcional à quantidade inicial, de modo que uma massa inicial m_0 se reduz a $m_0M(t)$ após um tempo t.

De uma quantidade inicial de 1 unidade de massa, restarão $M(t + s)$ unidades de massa após um tempo $t + s$. Outra maneira de calcular essa massa é considerar dois intervalos de tempo: após um tempo t, uma unidade de massa se reduz a $M(t)$ unidades de massa; após um tempo s, $m_0 = M(t)$ unidades de massa no instante t se reduzem a $m_0M(s) = M(t)M(s)$ unidades de massa no instante $t + s$.

Dessa forma, a função M, que controla o decaimento de massa de uma substância radioativa, satisfaz a identidade

$$M(t + s) = M(t)M(s),$$

para todos $s, t \geq 0$.

Embora os fenômenos descritos acima sejam de naturezas completamente distintas, ambos são regidos por funções que satisfazem uma mesma identidade. Na seção seguinte, veremos que é possível deduzir, a partir dessa identidade, várias propriedades notáveis desse tipo de função.

2 A propriedade fundamental e suas consequências

Usaremos a letra A para indicar um dos conjuntos numéricos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Vamos estudar funções $E : A \to \mathbb{R}$ que têm a seguinte **propriedade fundamental**:

$$E(x + y) = E(x)E(y), \tag{1}$$

para todos $x, y \in A$.

Observe que as funções consideradas nos exemplos 1 e 2 satisfazem tal identidade, para todos os reais não negativos x, y. Aqui, veremos que propriedades uma função que satisfaz (1) deve necessariamente ter.

Primeiramente, se $E(0) = 0$, então

$$E(x) = E(x + 0) = E(x)E(0) = E(x) \cdot 0 = 0$$

para todo $x \in A$. Dessa forma, para que a função E não seja identicamente nula, devemos assumir que $E(0) \neq 0$. Por outro lado, sendo esse o caso, temos

$$E(0) = E(0 + 0) = E(0)E(0)$$

e, como $E(0) \neq 0$, podemos cancelar $E(0)$ em ambos os membros da última igualdade para obter $E(0) = 1$. Resumindo:

Se $E : A \to \mathbb{R}$ satisfaz a relação (1) e não é identicamente nula, então $E(0) = 1$.

De um modo mais geral, se existe algum $x_0 \in A$ tal que $E(x_0) = 0$, então, para qualquer $x \in A$, temos

$$\begin{aligned} E(x) &= E(x_0 + x - x_0) \\ &= E(x_0)E(x - x_0) \\ &= 0 \cdot E(x - x_0) = 0. \end{aligned}$$

Assim,

> Se $E : A \to \mathbb{R}$ satisfaz a relação (1) e não é identicamente nula, então $E(x) \neq 0$, para todo $x \in A$.

Em particular, como $E(1) \neq 0$, temos $E(1) > 0$ ou $E(1) < 0$.

Continuando, vamos mostrar agora que, se $E(1) < 0$, então a função E é "mal comportada" e, por isso, evitaremos este caso. Se $E(1) = b < 0$, então

$$E(2) = E(1+1) = E(1)E(1) = b \cdot b = b^2 > 0;$$

portanto, a função E assume valores com sinais contrários nos extremos do intervalo $[1, 2]$. Como queremos, em última instância, considerar a função E definida sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, é natural pensarmos que, se o gráfico da função E for uma curva, e se essa curva passar por pontos separados pelo eixo das abscissas, ela deve passar por algum ponto pertencente a esse eixo (veja a Figura 1 e a Observação 3).

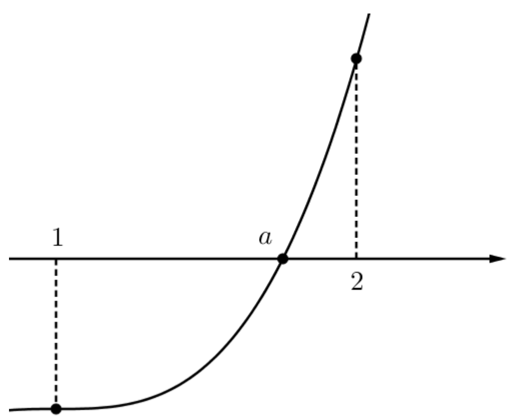

Figura 1: o gráfico corta o eixo das abscissas.

Mas isso implicaria que $E(a) = 0$, para algum $a \in (1, 2)$, e acabamos de ver que, se E não for identicamente nula, então será sempre diferente de zero.

Observação 3. *De um modo intuitivo, dizemos que uma função E é* ***contínua*** *se pequenas alterações em x provocam pequenas alterações em $E(x)$. Assim, o que fizemos acima foi sugerir que, se $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função contínua, então não podemos ter $E(1) < 0$.*

O resultado usado intuitivamente na discussão acima, que garante a existência de $a \in (1, 2)$ tal que $E(a) = 0$ vale para funções contínuas definidas em intervalos e é conhecido como o ***Teorema do Valor Intermediário****. Ele é um dos resultados fundamentais do Cálculo.*

Isso justifica a escolha de $E(1) = b$ como sendo um número real *positivo*. Esse número b é chamado de **base** da função exponencial E.

2.1 Expoentes inteiros ($A = \mathbb{Z}$)

Para o que segue, lembre-se de que, para um número natural n, a potência b^n é definida por $b^n = b \ldots b$, com o fator b sendo repetido n vezes. Por outro lado, usualmente define-se $b^0 = 1$ e $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$.

A partir de $E(1) = b$, obtemos $E(2) = E(1+1) = E(1)E(1) = b \cdot b = b^2$, $E(3) = E(2+1) = E(2)E(1) = b^2 \cdot b = b^3$. Em geral, se k é um número natural e supusermos que $E(k) = b^k$, então teremos

$$E(k+1) = E(k)E(1) = b^k \cdot b = b^{k+1}.$$

Portanto, pelo *Princípio da Indução Finita*, seguirá que

$$\boxed{E(n) = b^n, \text{ para todo } n \text{ natural.}}$$

Como $E(0) = 1 = b^0$, a igualdade $E(n) = b^n$ continua válida para $n = 0$.

Vamos, agora, calcular E para números inteiros negativos. Se k é um número natural, então $E(-k)E(k) = E(-k+k) = E(0) = 1$. Logo,

$$E(-k) = \frac{1}{E(k)} = \frac{1}{b^k} = b^{-k},$$

e a igualdade $E(n) = b^n$ se mantém válida para todo $n \in \mathbb{Z}$.

A discussão acima mostrou que uma função $E : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ que satisfaz a condição (1) é dada, para $n \in \mathbb{Z}$, por $E(n) = b^n$, onde $b = E(1) > 0$.

Neste ponto, vale a pena olhar com mais detalhe a *imagem* dessa função: $\mathrm{Im}\,(E) = \{E(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Se $b = 1$, então $E(n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, logo $\mathrm{Im}\,(E) = \{1\}$. Se $b \neq 1$, então $\mathrm{Im}\,(E) = \{b^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Duas características importantes desse último conjunto são:

- Se $x, y \in \mathrm{Im}\,(E)$, então $x = b^n = E(n)$ e $y = b^m = E(m)$, para certos $n, m \in \mathbb{Z}$, e $xy = E(n)E(m) = E(n+m) = b^{n+m} \in \mathrm{Im}\,(E)$, ou seja, *o produto de dois elementos de* $\mathrm{Im}\,(E)$ *também é um elemento de* $\mathrm{Im}\,(E)$.

- Se $x \in \mathrm{Im}\,(E)$, então $x = b^n = E(n)$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Logo $x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{b^n} = b^{-n} = E(-n) \in \mathrm{Im}\,(E)$, ou seja, *o inverso de um elemento de* $\mathrm{Im}\,(E)$ *também é um elemento de* $\mathrm{Im}\,(E)$.

Dessa forma, o conjunto $\mathrm{Im}\,(E)$ é fechado para a multiplicação de $\mathbb{R}$, de sorte que podemos ver a multiplicação de reais como uma *operação em* $\mathrm{Im}\,(E)$. Essa operação tem as seguintes propriedades:

(1) é associativa, ou seja, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathrm{Im}\,(E)$,

(2) tem elemento neutro: o elemento $1 = E(0) \in \mathrm{Im}\,(E)$ satisfaz $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, para qualquer $x \in \mathrm{Im}\,(E)$,

(3) o inverso x^{-1} de um elemento $x \in \mathrm{Im}\,(E)$ em relação à multiplicação ainda é um elemento de $\mathrm{Im}\,(E)$.

Um conjunto não vazio sobre o qual é possível definir uma operação que satisfaz as três condições acima, é chamado de **grupo**. Se, além disso, a operação for comutativa, ou seja, se $xy = yx$ para quaisquer x e y pertencentes ao conjunto, ele será chamado um **grupo abeliano**[1]

Em nosso caso, $\mathrm{Im}\,(E)$ é um grupo abeliano, uma vez que a multiplicação de números reais é comutativa. Outro exemplo de grupo abeliano é o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, com a operação adição "+"; nesse caso, o elemento neutro é 0 e o inverso de $x \in \mathbb{Z}$ é o inteiro $-x$. Nesse sentido, o que está acontecendo aqui é que a função E, devido à sua propriedade fundamental (1), "transfere" a estrutura de grupo abeliano aditivo de $\mathbb{Z}$ para impor uma estrutura de grupo abeliano multiplicativo em $\mathrm{Im}\,(E)$.

Exemplo 4. *Seja $E : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo* (1), *com $E(1) = b$. Os elementos do conjunto $\{E(n) \mid n \geq 0\} = \{1, b, b^2, b^3, \ldots\}$ formam uma **progressão geométrica** de termo inicial* 1 *e razão b. Os elementos do conjunto $\{E(n) \mid n \leq 0\} = \left\{1, \frac{1}{b}, \left(\frac{1}{b}\right)^2, \left(\frac{1}{b}\right)^3, \ldots\right\}$ formam uma progressão geométrica de termo inicial* 1 *e razão* $1/b$.

2.2 Expoentes racionais ($A = \mathbb{Q}$)

Continuando nosso estudo, nesta subseção vamos estudar as propriedades de uma função $E : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ satisfazendo (1) e com $E(1) = b > 0$. Primeiramente, notemos que, se $n \in \mathbb{N}$, então

$$E\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n}\Big) = E\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = E(1) = b.$$

Como estamos supondo que E satisfaz a propriedade (1), podemos escrever, após aplicar (1) $n-1$ vezes,

$$\underbrace{E\left(\frac{1}{n}\right) \ldots E\left(\frac{1}{n}\right)}_{n} = b,$$

ou seja, $E\left(\frac{1}{n}\right)^n = b$. Isso nos leva a concluir que $E\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{b}$, ou ainda, usando a notação $\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$, que

$$E\left(\frac{1}{n}\right) = b^{1/n}.$$

Agora, seja $r = \frac{m}{n}$ um número racional, onde $m \in \mathbb{Z}$. Se $m = 0$, então $r = \frac{m}{n} = 0$ e $E(r) = E(0) = 1 = b^0$. Se $m > 0$, então $r = \frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$, onde a soma tem m parcelas. Nesse caso, temos

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = E\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m}\Big) = \underbrace{E\left(\frac{1}{n}\right) \cdots E\left(\frac{1}{n}\right)}_{m},$$

[1] Em homenagem ao matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802–1829).

de sorte que

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = E\left(\frac{1}{n}\right)^m = \left(b^{1/n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \sqrt[n]{b^m}.$$

Denotando expressão $\sqrt[n]{b^m}$ por $b^{m/n}$, obtemos

$$E(m/n) = b^{m/n},$$

para $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$.

A passagem aos racionais negativos é similar aos argumentos que fizemos para passar aos inteiros negativos, na subseção anterior. Com efeito, se $m < 0$, então

$$E\left(\frac{-m}{n}\right) E\left(\frac{m}{n}\right) = E\left(\frac{-m}{n} + \frac{m}{n}\right) = E(0) = 1.$$

Como $m < 0$, temos $-m > 0$, logo, $E\left(\frac{-m}{n}\right) = b^{-m/n} = \left(b^{m/n}\right)^{-1}$. Disso, obtemos

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{E\left(\frac{-m}{n}\right)} = \frac{1}{(b^{m/n})^{-1}} = b^{m/n}.$$

Resumindo o que fizemos até aqui, concluímos que

> Se $E : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ satisfaz (1) e é tal que $E(1) = b > 0$, então $E(r) = b^r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Em particular, para $r, s \in \mathbb{Q}$ e $b > 0$, podemos reescrever a propriedade (1) da seguinte forma:

$$b^r \cdot b^s = b^{r+s}, \quad \forall\ r, s \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

A seguir, veremos tal *regra operatória* em ação.

Exemplo 5. *Calcule* $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[5]{128}$.

Solução. Ponha $b = 2$ em (2), temos

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[5]{128} &= \sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[5]{2^7} = 2^{4/3} \cdot 2^{7/5} \\ &= 2^{\frac{4}{3} + \frac{7}{5}} = 2^{\frac{41}{15}} = \sqrt[15]{2^{41}}. \end{aligned}$$

□

3 Expoentes reais ($A = \mathbb{R}$)

Seja $E : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz (1) e tal que $E(1) = b > 0$. Vamos analisar dois casos: $0 < b < 1$ e $b > 1$; o caso $b = 1$ fornece uma função E constante igual a 1 e, por isso, não será considerado aqui.

Afirmamos inicialmente que

> Se $b > 1$, a função $E : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, dada por $E(r) = b^r$, é crescente.

Para justificarmos a afirmação acima, vamos primeiro relembrar o que é uma função crescente. Dado um conjunto não vazio $I \subset \mathbb{R}$, dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é **crescente** se, para todos $x_1, x_2 \in I$, a condição $x_1 < x_2$ implicar $f(x_1) < f(x_2)$.

Sejam, pois r_1 e r_1 dois números racionais tais que $r_1 < r_2$. Podemos escrever $r_2 = r_1 + r$, com $r = r_2 - r_1 > 0$. Veja que r também é racional, por ser a diferença entre dois racionais. Assim,

$$E(r_2) = E(r_1 + r) = E(r_1)E(r). \tag{3}$$

Escreva $r = \frac{m}{n}$, onde $m, n > 0$ são números inteiros. Como estamos supondo que $b > 1$, temos $b^m = b \ldots b > 1$ e, daí, $E(r) = \sqrt[n]{b^m} > 1$. Assim, a igualdade (3) fornece

$$E(r_2) = E(r_1)E(r) > E(r_1),$$

de sorte que E é crescente.

Dado um conjunto não vazio $I \subset \mathbb{R}$, dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é **decrescente** se, para todos $x_1, x_2 \in I$, a condição $x_1 < x_2$ implicar $f(x_1) > f(x_2)$. Temos, agora, que

> Se $0 < b < 1$, a função $E : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, dada por $E(r) = b^r$, é decrescente.

Aqui, o argumento é praticamente o mesmo do caso anterior. Novamente, consideramos dois números racionais $r_1 < r_2$ e pomos $r = r_2 - r_1 > 0$, também racional. Escrevendo $r = \frac{m}{n}$, com $m, n > 0$ inteiros, vemos que $0 < b < 1$ implica que $0 < b^m < 1$ e $0 < \sqrt[n]{b^m} < 1$, ou seja, $0 < E(r) < 1$. Agora, a relação (3) implica

$$E(r_2) = E(r_1)E(r) < E(r_1)$$

e, por isso, E é decrescente.

No que segue, queremos considerar E como uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. A primeira coisa que precisamos fazer é definir o que se entende por b^x quando $x \in \mathbb{R}$. Já sabemos o que isso significa quando $x = r \in \mathbb{Q}$, mas, por exemplo, o que seria $b^{\sqrt{2}}$? Para suprir essa deficiência, necessitaremos de dois fatos básicos sobre números reais e funções definidas sobre os reais, os quais utilizaremos sem demonstração:

Fato 1: o conjunto dos racionais é *denso* no conjunto dos reais, ou seja, qualquer intervalo de $\mathbb{R}$ contém números racionais.

Quantificamos essa afirmação da seguinte forma: dados a real e $\delta > 0$, existe um número racional r pertencente ao intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$.

Fato 2: uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua quando pequenas variações em x produzem pequenas variações em $f(x)$ (veja a Observação 3).

Quantificamos essa afirmação da seguinte forma: f é contínua quando, para qualquer *erro* $\varepsilon > 0$, existe outro *erro* $\delta > 0$ tal que, se $x \in (a - \delta, a + \delta)$, então $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

Utilizando os fatos 1 e 2, é possível mostrar que, se $b > 0$ e $E_0 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ é a função dada por $E_0(r) = b^r$, então *existe* uma *única* extensão contínua $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de E_0. Nesse caso, definimos a potência b^x, com $x \in \mathbb{R}$, pela igualdade $b^x = E(x)$, e dizemos que E é a **função exponencial de base b**.

Na prática, pensamos em b^x como resultado de *aproximações sucessivas* de números da forma b^r, com r racional. Mais precisamente, sendo x irracional, usamos o fato 1 para encontrar racionais $r_1 < r_2 < \ldots < x < \ldots < s_2 < s_1$ e tais que r_j e s_j se aproximam mais e mais de x

(no caso $x = \sqrt{2}$, por exemplo, poderíamos tomar $r_1 = 1$, $r_2 = 1,4$, $r_3 = 1,41$, etc, e $s_1 = 2$, $s_2 = 1,5$, $s_3 = 1,42$, etc). Então, observamos que, se $b > 1$, tem-se

$$b^{r_1} < b^{r_2} < b^{r_3} < \ldots < b^{s_3} < b^{s_2} < b^{s_1};$$

continuando, mostramos que existe um único número real y maior que todos os b^{r_j} e menor que todos os b^{s_j}, e *definimos* b^x como sendo esse número real.

No caso $0 < b < 1$ o argumento é essencialmente idêntico ao acima; a única diferença essencial reside no fato de que, nesse caso, temos $b^{r_1} > b^{r_2} > b^{r_3} > \ldots > b^{s_3} > b^{s_2} > b^{s_1}$.

Em resumo,

> Escrevendo $r_j \to x$ e $s_j \to x$ para significar que r_j e s_j se aproximam mais e mais de x, temos que
>
> $$\left.\begin{array}{r} r_j < x < s_j \\ r_j, s_j \to x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b^{r_j} < b^x < b^{s_j} \\ b^{r_j}, b^{s_j} \to b^x \end{array}\right. .$$

Observação 6. *Grosso modo, a maneira descrita acima é aquela pela qual as calculadoras operam com números irracionais: aproximando-os por números racionais e usando a continuidade das funções envolvidas nos cálculos que se quer fazer para ter certeza de que o resultado gerado com tais aproximações também é uma boa aproximação do resultado exato.*

Uma observação importante é que

$$b^x > 0, \quad \forall\ b > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Realmente, se $r, s \in \mathbb{Q}$ são tais que $r < x < s$, então, conforme vimos acima, temos $b^r < b^x < b^s$ se $b > 1$ ou $b^r > b^x > b^s$ se $0 < b < 1$. Em qualquer caso, como $b^r, b^s > 0$, é claro que $b^x > 0$ também.

Outra observação importante é colecionada no seguinte

Teorema 7. *Seja $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função exponencial de base b.*

(a) *Se $b > 1$, então E é crescente.*

(b) *Se $0 < b < 1$, então E é decrescente.*

Prova. Analisemos o caso $b > 1$, sendo o caso $0 < b < 1$ totalmente análogo.

Dados números reais $x_1 < x_2$, queremos estabelecer que $b^{x_1} < b^{x_2}$. Ora, a discussão anterior deixa claro que, se $r \in (x_1, x_2)$ é um racional (o qual existe, pelo Fato 1), então $b^{x_1} < b^r$ e $b^r < b^{x_2}$. Em particular, $b^{x_1} < b^{x_2}$. □

A seguir, discutiremos como a função exponencial varia. A identidade fundamental (1) nos permite encontrar uma relação muito especial entre a taxa de variação de E e a própria função E.

Podemos pensar na **taxa de variação** da função E em um ponto t como uma “velocidade” de crescimento de E em um intervalo pequeno que vai de t a $t + s$. Pensando nas variáveis t e s como sendo “tempo”, a razão

$$\frac{E(t+s) - E(t)}{s} \tag{4}$$

mede a “velocidade média” de E no intervalo que vai de t a $t + s$. Se s é muito pequeno, essa velocidade média se aproxima da “velocidade instantânea” no instante t. Denotamos essa velocidade instantânea por $E'(t)$.

Em particular, o quociente

$$\frac{E(s) - 1}{s} = \frac{E(0+s) - E(0)}{s} \tag{5}$$

mede, para valores pequenos de s, a velocidade instantânea de E no instante 0, ou seja, $E'(0)$.

Da relação $E(t + s) = E(t)E(s)$ segue que $E(t + s) - E(t) = E(t)E(s) - E(t)$, logo,

$$\frac{E(t+s) - E(t)}{s} = E(t) \cdot \frac{E(s) - 1}{s}.$$

Fazendo s se aproximar de zero, obtemos a igualdade

$$E'(t) = E(t) \cdot E'(0). \tag{6}$$

Quando estudarmos logaritmos, veremos que existe uma função exponencial E tal que $E'(0) = 1$. Por esse motivo, essa função exponencial específica ocupa um lugar de destaque entre as funções exponenciais, sendo chamada *função exponencial natural*.

Ainda para tal função exponencial, teremos de (6) que

$$E'(x) = E(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

É costume denotar a base dessa função exponencial por e, de sorte que $E(1) = e$ e $E(x) = e^x$, para $x \in \mathbb{R}$.

Também veremos, em uma aula sobre logaritmos, que o número e é irracional, com

$$e \cong 2,718281828459045. \tag{7}$$

A discussão acima permite dar uma outra justificativa para o Teorema 7, a qual é bastante instrutiva para estudos posteriores.

Prova alternativa do Teorema 7.
(a) Como $b > 1$, a restrição da função E aos racionais é crescente. Isto posto, fazendo s aproximar-se de 0 por valores racionais positivos na expressão (5), temos que

$$s > 0 \Rightarrow E(s) > E(0) = 1 \Rightarrow \frac{E(s) - 1}{s} > 0.$$

Agora, fazendo s aproximar-se de 0 por valores racionais negativos, temos, de forma análoga, $\frac{E(s)-1}{s} > 0$. De qualquer modo, a “velocidade” $E'(0)$ é positiva.

Observe agora que $E(t) > 0$ e, pela igualdade (6), $E'(t) = E(t) \cdot E'(0) > 0$. Portanto, intuitivamente, é de se esperar que, tendo “velocidade” positiva em cada instante, a função E seja crescente. De um modo um pouco mais preciso, se $x_1 < x_2$ são números reais, denotemos $t = x_1$ e $s = x_2 - x_1$, ou seja, $x_2 = t + s$. Então,

$$\frac{E(x_2) - E(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{E(t+s) - E(t)}{s} \cong E'(t) > 0,$$

onde o símbolo “≈” significa que a fração $\frac{E(t+s)-E(t)}{s}$ é, aproximadamente igual a[2], $E'(t)$. Essa aproximação é tão precisa quanto se queira, desde que $s = x_2 - x_1$ seja suficientemente pequeno.

Uma vez que $E'(t) > 0$, podemos considerar $\frac{E(t+s)-E(t)}{s}$ suficientemente próximo de $E'(t)$, para que também seja positivo. Assim, $\frac{E(x_2)-E(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ e, como $x_2 - x_1 > 0$, temos que $E(x_2) - E(x_1) > 0$, ou seja, $E(x_1) < E(x_2)$ e E é uma função crescente.

(b) Este caso pode ser tratado do mesmo modo que o caso anterior, com a diferença que, neste caso, $E'(t) < 0$, para todo t, ou seja, E tem uma “velocidade” negativa, o que indica que E é decrescente neste caso. Deixamos os detalhes a cargo do leitor. □

Observação 8. *Como consequência do Teorema 7, segue que a função exponencial é sempre* ***injetiva****, ou seja, se $x_1 \neq x_2$ são números reais, então $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$, logo $E(x_1) < E(x_2)$ ou $E(x_2) < E(x_1)$, logo $E(x_1) \neq E(x_2)$.*

Evidentemente, a função $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, pois $E(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Na aula sobre logaritmos, veremos que a imagem de E é o intervalo $(0, +\infty)$.

[2] Uma demonstração rigorosa desse fato teria que fazer uso de um teorema devido ao matemático franco-italiano J. L. Lagrange (1736–1813), conhecido como Teorema do Valor Médio de Lagrange.

4 De volta aos exemplos iniciais

Nos exemplos 1 e 2, as funções P e M satisfazem a identidade fundamental (1). Vamos também supor que essas funções são contínuas, o que é plausível pois, em intervalos pequenos de tempo, as mudanças, de população de bactérias no Exemplo 1 e de massa de material radioativo no Exemplo 2, são pequenas.

Primeiramente, vejamos a função $P : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Suponhamos que a população inicial de bactérias seja $P_0 = 1$, ou seja, $P(0) = 1$. Então, $P(t) = b^t$, onde $b > 1$ porque a função P é crescente. Em geral, se a população inicial P_0 de bactérias não for necessariamente igual a 1, temos $P(t) = P_0 b^t$.

Em uma aula futura sobre logaritmos, veremos que $b = e^B$, onde $e \cong 2,71828$ é o número que aparece em (7) e $B > 0$. Assim, a função P pode ser escrita como

$$P(t) = P_0 \cdot e^{Bt}, \tag{8}$$

onde P_0 e B são constantes que podem ser calculadas uma vez que se conheça a população inicial $P(0)$ e a velocidade inicial $P'(0)$ de crescimento da população.

Se a função $M : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é tal que $M(0) = 1$, então $M(t) = a^t$, onde $0 < a < 1$, pois M é uma função decrescente. Se a massa inicial é M_0, não necessariamente igual a 1, então $M(t) = M_0 a^t$.

Assim como no exemplo anterior, $a = e^{-A}$, onde $e \cong 2,71828$ é novamente o número que aparece em (7) e $A > 0$. Dessa forma, a função M pode ser escrita como

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-At}, \tag{9}$$

onde M_0 e A são constantes que podem ser calculadas a partir da massa inicial $M(0)$ de material radioativo e de sua velocidade inicial de desintegração $M'(0)$.

Dicas para o Professor

A presente aula pode ser coberta em três ou quatro encontros de 50 minutos.

Aqui, temos um exemplo típico de função cujo estudo rigoroso só é possível com o uso dos métodos do Cálculo Diferencial e Integral. No caso da função exponencial, temos três alternativas para defini-la (com os recursos do Cálculo):

i. como solução única da equação diferencial $y' = ay$, com a constante e $y(0) = 1$;

ii. como a *série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ (para a base e);

iii. como a inversa da função $L : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada pela *integral* $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ (a *função logaritmo natural*).

Uma vez que nenhum desses recursos está disponível no Ensino Médio, tivemos que trilhar um caminho mais longo e trabalhoso.

Um livro de Cálculo que trás muitas aplicações interessantes da função exponencial é a referência [1].

Entendemos que essa necessidade do uso do Cálculo é algo positivo, pois dá motivação para estudos mais avançados, que não são apenas continuação dos assuntos vistos no Ensino Médio, como também servem para justificar de modo rigoroso certos resultados básicos vistos no Ensino Médio, como a definição geral do que é uma potência b^x, com expoente real x.

Quando estudarmos logaritmos, veremos que uma caminho natural e mais acessível para a construção da função exponencial com expoente real é sua definição como a inversa de uma função logarítmica, cuja definição envolve o cálculo de áreas de certas regiões do plano delimitadas por segmentos de reta e por um ramo de hipérbole equilátera. Essa é a abordagem desenvolvida na referências [2] e [3].

Se você preferir, pode seguir o tratamento apresentado nesta aula até a parte em que os expoentes são racionais. Pode, então, assumir que a função se estende, *continuamente*, de modo único para expoentes reais, adiando a justificativa deste fato para quando estudarmos logaritmos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. Lax, et. al. *Cálculo, Aplicações e Programação*, vol. 1, Rio de Janeiro, Ed. Guanabara Dois, 1976.
2. A. Caminha. *Topicos de Matematica Elementar*, vol.3, SBM, Rio de Janeiro, 2012.
3. E. L. Lima. *Logaritmos*, SBM, Rio de Janeiro, 1991.