Material Teórico - Módulo de CONJUNTOS

Conjuntos Numéricos - Parte 03

9o Ano

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Autor: Prof. Antônio Caminha Muniz Neto

15 de fevereiro de 2020

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Todos os números são racionais?

Os gregos acreditavam que os números racionais eram suficientes para lidar com qualquer tipo de problema matemático. De certa forma, acreditava-se que os racionais "ocupavam" toda a reta numérica.

Porém, com a descoberta do teorema de Pitágoras, os matemáticos antigos começaram a dar certa atenção a números que eram raízes quadradas de racionais que não eram quadrados perfeitos. Por exemplo, ao construirmos um quadrado lado 1 sobre o segmento com extremidades nos pontos 0 e 1 da reta numérica, sua diagonal irá medir $\sqrt{2}$. Usando um compasso centrado em 0, podemos transportar essa diagonal e marcar sobre a reta o ponto que representa $\sqrt{2}$.

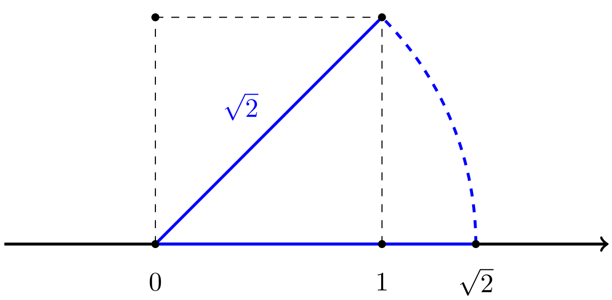


Figura 1: Construção da representação geométrica de $\sqrt{2}$ na reta numérica

Como dissemos, os antigos matemáticos gregos acreditavam que todos os números eram racionais; em particular, $\sqrt{2}$ também deveria ser racional. Porém, ainda nos tempos antigos provou-se o seguinte resultado:

Teorema 1. *Não existem inteiros a e b tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.*

Prova. Suponha que $\sqrt{2}$ seja racional, isto é, que existam inteiros não nulos a, b tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Suponha, ainda, que $\frac{a}{b}$ é irredutível. Elevando-se ao quadrado os dois lados dessa igualdade, obtemos $\frac{a^2}{b^2} = 2$ ou, o que é o mesmo,

$$a^2 = 2b^2.$$

A partir da última igualdade acima, deduzimos que a^2 é um número par (pois o lado direito é par); logo, a também deve ser par. Assim, existe um inteiro n tal que $a = 2n$. Substituindo $a = 2n$ em $a^2 = 2b^2$, ficamos com $4n^2 = 2b^2$. Simplificando, chegamos a

$$2n^2 = b^2.$$

Usando um raciocínio análogo ao do parágrafo anterior, observe que b^2 também é um número par; consequentemente, b também é par. Assim, existe um inteiro m tal que $b = 2m$. Mas, sendo este o caso, a fração $\frac{a}{b} = \frac{2n}{2m}$ seria redutível. Isto contradiz a suposição que fizemos inicialmente, de que ela fosse irredutível. Portanto, $\sqrt{2}$ não é racional. $\square$

Essa demonstração tem um significado matemático histórico: pela primeira vez demonstrou-se que um número poderia não ser racional. Consequentemente, o conjunto dos racionais não poderia representar todos os números, ou seja, se apenas os números racionais fossem posicionados na reta numérica, sobrariam "espaços vazios". Assim, seria necessário expandir o conceito de número para além dos racionais, preenchendo os vazios deixados na reta numérica. É nesse processo que surgem o **números reais**.

Definição 2. *Um número real que não é racional é chamado de **irracional**. O conjunto dos números irracionais é dado por $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Observação 3. *Note que $\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$. Porém, essa identidade não classifica o número $\sqrt{2}$ como racional uma vez que o numerador da fração $\frac{2\sqrt{2}}{2}$ não é inteiro, e os números racionais são aqueles que podem ser expressos como divisão de inteiros, sendo o denominador não nulo.*

2 Representação decimal de números irracionais

No módulo anterior, aprendemos que os números racionais possuem representações no formato fracionário e na base decimal que podem ser finitas ou infinitas. No caso de representações infinitas, estas são sempre periódicas após certo número de casas à direita da vírgula.

Por outro lado, na seção anterior, demonstramos que existem números (como $\sqrt{2}$) que não possuem representação fracionária. Porém, esse fato não implica que os números irracionais não possuam representação decimal.

Nessa seção iremos explorar a representação decimal dos números irracionais e faremos isso partindo do seguinte experimento:

Exercício 4. *Usando uma calculadora com a opção de raiz quadrada, calcule o valor de $\sqrt{2}$.*

Após realizar a operação, no visor da calculadora aparecerá um número que é aproximadamente igual a

$$1{,}414213562$$

(O número de casas decimais irá depender das configurações de sua calculadora.)

É importante mencionar que número que apareceu no visor não é a representação de $\sqrt{2}$ na base decimal. De fato, 1,414213562 é um número racional, que, por conseguinte, pode ser expresso como divisão de dois inteiros:

$$1{,}414213562 = \frac{1414213562}{1000000000}.$$

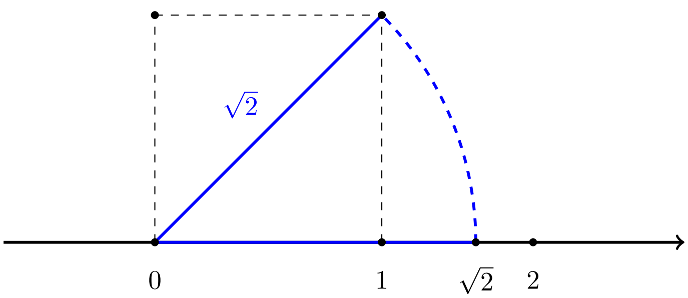
Este número é apenas uma *aproximação* do número $\sqrt{2}$, e essa aproximação pode ser melhorada[1] escolhendo-se racionais com maior número de casas decimais após a vírgula.

Uma aproximação de $\sqrt{2}$ com mais casas decimais é

$$\sqrt{2} \cong 1,41421356237309504880168872420969807$$
$$85696718753769480731766797379 9.$$

Usando programas de computador (algoritmos) podemos chegar a aproximações de $\sqrt{2}$ com quantas casas decimais desejarmos. Aprenderemos agora um desses algoritmos, que, apesar de não ser muito eficiente e preciso, possui um apelo visual que favorece a compreensão do método.

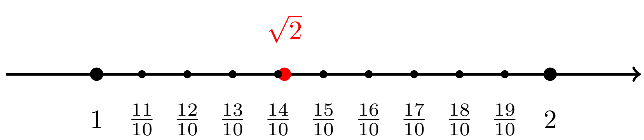
Retomando a figura 1 e expandindo-a para incluir o número 2 na reta numérica, obtendo a seguinte figura:



A partir dela, percebemos que $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2, fato que podemos escrever como

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

Assim, podemos escrever $\sqrt{2} \cong 1$ como uma primeira aproximação para $\sqrt{2}$. Podemos melhorar essa aproximação dividindo o intervalo entre 1 e 2 em dez partes iguais, o que pode ser ilustrado visualmente como a seguir.



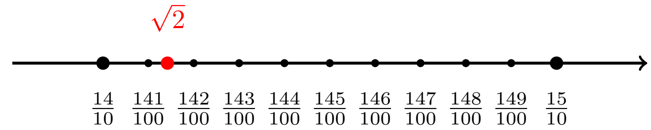
Note que $\sqrt{2}$ está entre as frações $\frac{14}{10}$ e $\frac{15}{10}$. Em outros termos,

$$\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10}.$$

Assim, obtemos $\sqrt{2} \cong 1{,}4$ como uma segunda aproximação para $\sqrt{2}$.

Repetindo o processo, desta vez subdividindo o intervalo com extremidades em $\frac{14}{10}$ e $\frac{15}{10}$ em dez subintervalos iguais, chegaríamos à seguinte figura (ampliada):

[1] Quando dizemos que uma aproximação pode ser melhorada, em termos mais rigorosos estamos dizendo que é possível encontrar um outro número racional, ainda mais próximo de $\sqrt{2}$.



Note que $\sqrt{2}$ está entre as frações $\frac{141}{100}$ e $\frac{142}{100}$. Em outros termos,

$$\frac{141}{100} < \sqrt{2} < \frac{142}{100}.$$

Assim, obtemos $\sqrt{2} \cong 1{,}41$ como uma terceira aproximação para $\sqrt{2}$.

Note que na n-ésima aplicação do algoritmo, obtemos uma aproximação uma aproximação para $\sqrt{2}$ com n algarismos à direita da vírgula, na representação decimal.

3 Intervalos reais

Intuitivamente, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é formado por todos os números que podem ser representados na reta numérica. Concentraremos nossa atenção em um tipo especial de subconjunto de $\mathbb{R}$, os **intervalos**, os quais podem ser limitados ou ilimitados.

Existem quatro tipos de *intervalos limitados* reais:

I. Um intervalo I é **fechado** se existem reais a e b tais que $I = \{x \mid a \leq x \leq b\}$. Este intervalo pode ser representado através da notação simplificada $I = [a, b]$ ou ilustrado como na figura abaixo:

II. Um intervalo I é **aberto** se existem reais a e b tais que $I = \{x \mid a < x < b\}$. Este intervalo pode ser representado através da notação simplificada $I = (a, b)$ ou ilustrado como segue:

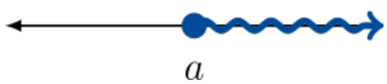
III. Um intervalo I é **aberto à esquerda e fechado à direita** se existem reais a e b tais que $I = \{x \mid a < x \leq b\}$. Este intervalo pode ser representado através da notação simplificada $I = (a, b]$ ou, ainda, ilustrado como:

IV. Um intervalo I é **fechado à esquerda e aberto à direita** se existem reais a e b tais que $I = \{x \mid a \leq x < b\}$. Este intervalo pode ser representado através da notação simplificada $I = [a, b)$ ou ilustrado como:

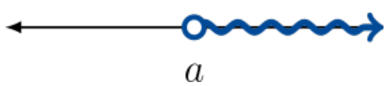
Nas figuras acima, observe que utilizamos um círculo sem preenchimento para representar na reta um ponto que não pertence a um conjunto, ao passo que utilizamos um círculo com preenchimento para representar na reta um ponto que pertence a um conjunto.

Também há quatro tipos de *intervalos ilimitados* reais:

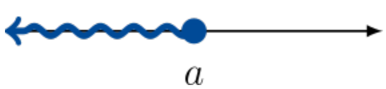
I. Um intervalo I é **fechado e ilimitado à direita** se existe um real a tal que $I = \{x \mid a \leq x\}$. Este intervalo pode ser representado através da notação simplificada $I = [a, +\infty)$, sendo ilustrado como:



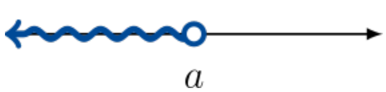
II. Um intervalo I é **aberto e ilimitado à direita** se existe um real a tal que $I = \{x \mid a < x\}$. Este intervalo pode ser representado através da notação simplificada $I = (a, +\infty)$ ou ilustrado como:



III. Um intervalo I é **fechado e ilimitado à esquerda** se existe um real a tal que $I = \{x \mid a \geq x\}$. Este intervalo pode ser representado através da notação simplificada $I = (-\infty, a]$ ou ilustrado como:



IV. Um intervalo I é **aberto e ilimitado à esquerda** se existe um real a tal que $I = \{x \mid a > x\}$. Este intervalo pode ser representado através da notação simplificada $I = (-\infty, a)$ ou ilustrado como:



Perceba que podemos aplicar a intervalos as operações de conjuntos aprendidas nas aulas anteriores, uma vez que os intervalos são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Vejamos um exemplo nesse sentido:

Exemplo 5. *Se $A = [1,3]$ e $B = (2,4)$, então $A \cup B = [1,4)$, $A \cap B = (2,3]$, $A - B = [1,2]$ e $B - A = (3,4)$.*

Também é importante destacar alguns intervalos notáveis de $\mathbb{R}$:

Conjunto	**Descrição**
$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$	Conjunto dos reais não nulos.
$\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	Conjunto dos reais positivos.
$\mathbb{R}^*_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$	Conjunto dos reais negativos.
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$	Conjunto dos reais não-negativos.
$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$	Conjunto dos reais não-positivos.

A partir da interseção desses intervalos com os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, podemos construir outros subconjuntos notáveis utilizando os símbolos $*$, $+$ e $-$ de forma análoga. Por exemplo, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Z}$ é o conjunto dos inteiros não-negativos. Outro exemplo é $\mathbb{Q}^*_- = \mathbb{R}^*_- \cap \mathbb{Q}$, que representa o conjunto dos racionais negativos.

Por fim, veja que podemos representar a relação de hierarquia entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ utilizando diagramas de Venn. Note ainda que o conjunto dos irracionais é dado por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exercício 6 (UECE-adaptado). *Sejam $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros,*

$$I = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq \frac{x+4}{2} \leq 8\right\}$$

e

$$J = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid (x-2)^2 \geq 4\right\}.$$

O número de elementos do conjunto $I \cap J$ é:

(*a*) 8.

(*b*) 9.

(*c*) 12.

(*d*) 14.

Solução. Observe que um inteiro x pertence a I se, e só se, $0 \leq x + 4 \leq 16$, isto é, $-4 \leq x \leq 12$. Assim,

$$I = \{-4, -3, -2, \ldots, 10, 11, 12\}.$$

Da mesma forma, J é o conjunto dos inteiros x tais que $|x-2| \geq 2$ ou, ainda, $x - 2 \geq 2$ ou $x - 2 \leq -2$. Portanto, $x \geq 4$ ou $x \leq 0$, de forma que

$$J = \{\ldots, -2, -1, 0\} \cup \{4, 5, 6, \ldots\}.$$

Agora, é imediato que

$$I \cap J = \{-4, -3, -2, -1, -0\} \cup \{4, 5, \ldots, 11, 12\},$$

de forma que $|I \cap J| = 14$. A resposta correta é (d). □

Exercício 7 (PUC-MG). *Se $A = (-2,3]$ e $B = [0,5]$, então os números inteiros que estão em $B \setminus A$ são:*

(*a*) -1 *e* 0.

(*b*) 0 *e* 1.

(*c*) 4 *e* 5.

(*d*) 3*,* 4 *e* 5.

(*e*) 0*,* 1*,* 2 *e* 3.

Solução. Comece observando que $B \setminus A = [0, 5] \setminus (-, 2, 3]$. Marcando A e B geometricamente, vê-se facilmente que $B \setminus A = (3, 5]$. Portanto, o inteiros que pertencem a $B \setminus A$ são somente 4 e 5. A resposta correta é (c). $\square$

4 Sugestões ao professor

Recomendamos dois encontros de 50 minutos cada para apresentar o conteúdo deste material. No primeiro, apresente o conjunto dos números racionais e, no segundo, o conjunto dos números reais. Note que estes temas são de fundamental importância em grande parte dos assuntos relativos à Matemática escolar. Por este motivo, esteja atento às dificuldades operacionais e de entendimento dos alunos. Se necessário, evite avançar no conteúdo até que essas dificuldades sejam superadas.

Lembre seus alunos de que um número racional é todo aquele que pode ser representado por uma fração cujos numerador e denominador são ambos inteiros. Assim, se um número é escrito como uma fração de termos que não inteiros, este número não é necessariamente racional. Este é um erro comum entre os alunos; por isso, vale a pena utilizar algum tempo para revisar este conceito.

As operações de conjunto envolvendo intervalos são especialmente úteis para resolvermos inequações com funções racionais. Se a turma for avançada, o professor também pode comentar superficialmente sobre o conjunto dos números complexos, como curiosidade.