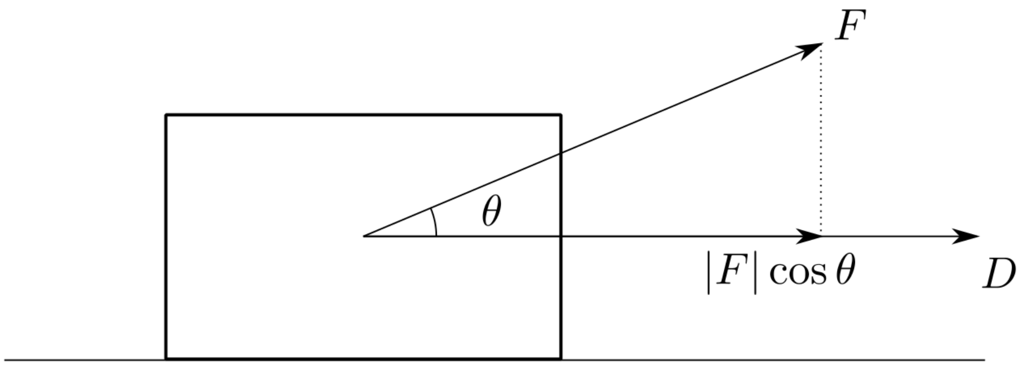
Cálculo III

Integrais de linha de campos vetoriais

Prof. Adriano Barbosa

Trabalho (física)

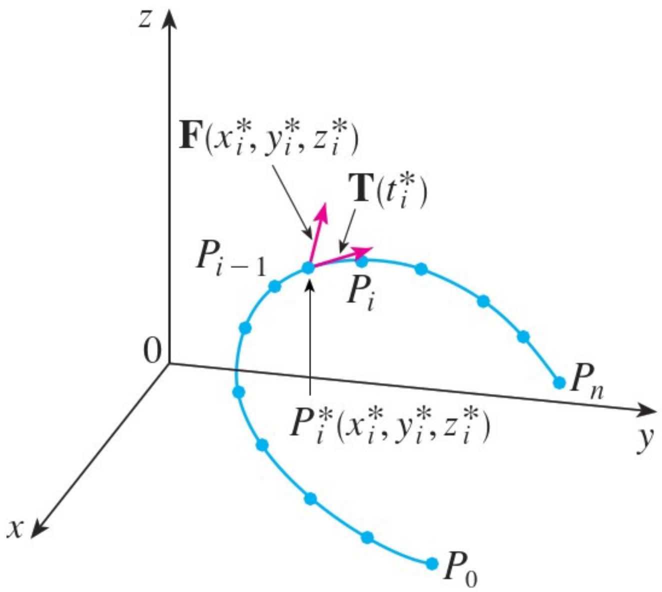
O trabalho realizado por uma força é o produto da componente da força ao longo do vetor de deslocamento pela distância percorrida.



$$W = (|\mathbf{F}| \cos \theta)|\mathbf{D}|$$

$$W = |\mathbf{F}||\mathbf{D}|\cos \theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$$

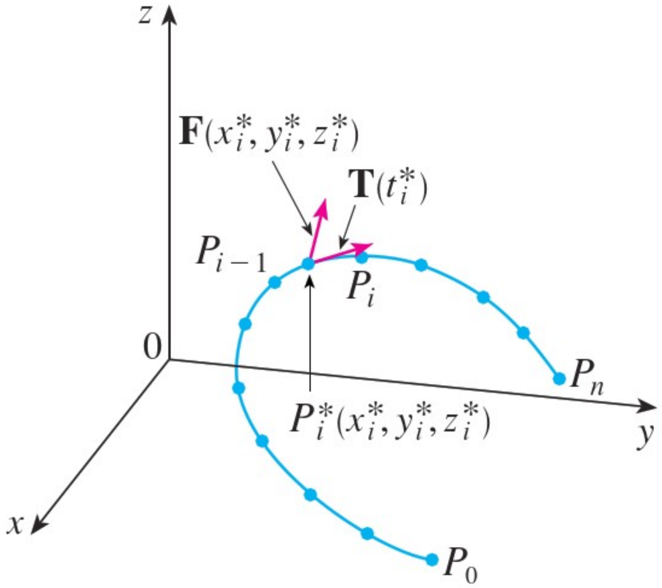
Trabalho ao longo de uma curva



$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \, \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \, \Delta s_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \, \Delta s_i$$

Trabalho ao longo de uma curva



$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \, \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \, \Delta s_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \, \Delta s_i$$

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) \, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

Trabalho ao longo de uma curva

Se a curva C é dada pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\ \mathbf{i} + y(t)\ \mathbf{j} + z(t)\ \mathbf{k}$, então

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\,\mathbf{r}'(t)|$$

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\,\mathbf{r}'(t)\,|} \right] |\,\mathbf{r}'(t)\,|\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Trabalho ao longo de uma curva

Se a curva C é dada pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, então

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\,\mathbf{r}'(t)|$$

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\,\mathbf{r}'(t)|} \right] |\,\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Exemplo

Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Exemplo

Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Exemplo

Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \operatorname{sen} t)\,dt$$

Exemplo

Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \operatorname{sen} t)\,dt$$

$$= 2\,\frac{\cos^3 t}{3}\Bigg]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

OBSERVAÇÃO Apesar de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ e as integrais em relação ao comprimento do arco não trocarem de sinal quando a orientação do caminho for invertida, é verdade que

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

pois o vetor tangente da unidade $\mathbf{T}$ é substituído por sua negativa quando C é substituído por $-C$.

Exemplo

Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$ e C é a cúbica retorcida

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Exemplo

Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$ e C é a cúbica retorcida

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^3\,\mathbf{i} + t^5\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^3 + 5t^6)\,dt = \frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\bigg]_0^1 = \frac{27}{28}$$

Integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \big(x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}\big)\, dt$$

$$= \int_a^b \Big[P\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, z'(t)\Big]\, dt$$

Integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \big(x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}\big)\, dt$$

$$= \int_a^b \Big[P\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,z'(t)\Big]\, dt$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad \text{onde } \mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

Integral de linha

Por exemplo, a integral $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ poderia ser expressa como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \text{ onde } \mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$

Exercício

Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$$\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + 3y^2\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(t) = 11t^4\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + (y + 2)\,\mathbf{j}$ sobre um objeto que se move sobre um arco da cicloide $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.