Desigualdades

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, dizemos que $x < y$ se $y - x > 0$, ou seja, se $y - x$ está a direita de 0 na reta real.

Propriedades básicas:

P1) $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se exclusivamente $x < 0$ ou $x = 0$ ou $x > 0$

P2) $\forall x, y > 0$, tem-se $x + y > 0$ e $xy > 0$

Mostremos algumas propriedades:

1) Tricotomia: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se exclusivamente $x < y$ ou $x = y$ ou $y < x$

De fato, $y - x \in \mathbb{R}$, logo, por P1, temos:

$y - x > 0$ ou $y - x = 0$ ou $y - x < 0$

$\Rightarrow$ $x < y$ ou $x = y$ ou $y < x$

2) Transitividade: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.

De fato, $x < y \Rightarrow y - x > 0$ e $y < z \Rightarrow z - y > 0$. Assim,

$$z - x = (\overbrace{z - y}^{>0}) + (\overbrace{y - x}^{>0}) \overset{(P2)}{>} 0 \Rightarrow x < z.$$

3) Monotonicidade da adição: Se $x < y$, então, para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x + z < y + z$.

De fato, $x < y \Rightarrow y - x > 0$ e

$$(y + z) - (x + z) = (y - x) + (\overbrace{z - z}^{=0}) = y - x > 0 \Rightarrow x + z < y + z.$$

4) Monotonicidade da multiplicação: Se $x<y$, então, para $z>0$, tem-se $xz<yz$.

De fato, $x<y \Rightarrow y-x>0$ e

$$yz-xz = \overset{>0}{(y-x)}\,\overset{>0\ (P2)}{z} > 0 \Rightarrow xz<yz.$$

Observe que se $z<0$ e $x<y$, temos

$$yz-xz = \overset{>0}{(y-x)}\,\overset{<0}{z} < 0 \Rightarrow xz-yz>0 \Rightarrow yz<xz.$$

Exercícios:

1) Se $x<y$ e $x'<y'$, mostre que $x+x'<y+y'$.

Pela monot. da adição,

$$x<y \Rightarrow x+x' < y+x'$$

e $x'<y' \Rightarrow x'+y < y'+y$.

Pela transitividade, $x+x'<y+y'$.

2) $\forall\, y, x', y'>0$, mostre que se $x<y$ e $x'<y$, então $xx'<yy'$.

Pela monot. da multiplicação,

$$x<y \Rightarrow xx' < yx'$$

e $x'<y' \Rightarrow x'y < y'y$.

Pela transitividade, $xx'<yy'$.

3) $x^2 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Se $x = 0$, então $x^2 = 0^2 = 0$.

Se $x \neq 0$, por P1, $x > 0$ ou $x < 0$. Logo, pela monot. da multiplic.,

$x > 0 \overset{(\times x)}{\Rightarrow} x \cdot x > 0 \cdot x \Rightarrow x^2 > 0$

e $x < 0 \overset{(\times x)}{\Rightarrow} x \cdot x > 0 \cdot x \Rightarrow x^2 > 0$.

4) Se $x > 0$, então $\frac{1}{x} > 0$.

Observe que $\frac{1}{x} = x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2$. Por P2, $\frac{1}{x} > 0$.

5) Se $0 < x < y$, então $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Como $x, y > 0$, por P2, $x \cdot y > 0$ e, pelo exercício 4, $\frac{1}{x \cdot y} > 0$.

Segue da monot. da multiplicação que

$$x < y \overset{(\times \frac{1}{xy})}{\Rightarrow} \frac{x}{xy} < \frac{y}{xy} \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

Segue do exercício 4 que $0 < \frac{1}{y}$.