Eq. lineares de 2ª ordem

Uma EDO é dita linear de 2ª ordem se pode ser escrita na forma

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = S(x)$$

onde, P, Q, R e S são contínuas em algum intervalo. Difícil!

Uma EDO linear de 2ª ordem homogênea com coeficientes constantes é uma eq. da forma

$$a y'' + b y' + c y = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \quad (\ast)$$

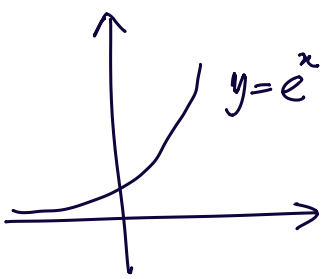
Teorema: Se y_1 e y_2 são sol. de $(\ast)$, então $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é sol. de $(\ast)$.

Teorema: Se y_1 e y_2 são sol. LI de $(\ast)$, então a sol. geral de $(\ast)$ é $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

não são múltiplas (Wronskiano)
$y_1 \neq c y_2$

Observe o comportamento da seguinte função: $y = e^{rx}$

$$y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rx}$$



$$\therefore\ a y'' + b y' + c y = a r^2 e^{rx} + b r e^{rx} + c e^{rx}$$

$$= (a r^2 + b r + c) \cdot \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} = 0$$

Assim, $y = e^{rx}$ é sol. de $(\ast)$ se $ar^2 + br + c = 0$ p/ algum r.

eq. característica ou auxiliar

$\Delta > 0$: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$

$\Delta = 0$: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 = r_2 = r$

$\Delta < 0$: $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$

Exemplos: 1) $y'' + y' - 6y = 0$

Eq. característica: $r^2 + r - 6 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$

$r = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow r_1 = 2$ e $r_2 = -3$.

Logo, $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = e^{-3x}$ são sol. da EDO. De fato,

$y_1 = e^{2x} \Rightarrow y_1' = 2e^{2x} \Rightarrow y_1'' = 4e^{2x}$

$\therefore 4e^{2x} + 2e^{2x} - 6 \cdot e^{2x} = 0$ ✓

$y_2 = e^{-3x} \Rightarrow y_2' = -3e^{-3x} \Rightarrow y_2'' = 9e^{-3x}$

$\therefore 9e^{-3x} - 3e^{-3x} - 6 \cdot e^{-3x} = 0$ ✓

Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $e^{2x} = k e^{-3x}$? Se existir,

$k = \frac{e^{2x}}{e^{-3x}}$ não é constante!

$x = 0$: $\frac{e^{2 \cdot 0}}{e^{-3 \cdot 0}} = 1$, $x = 3$: $\frac{e^{2 \cdot 3}}{e^{-3 \cdot 3}} = \frac{e^6}{e^{-9}} = e^6 \cdot e^9 = e^{15} \neq 1$

Portanto, $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = e^{-3x}$ são LI e a sol. geral da EDO é $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2) $4y'' + 12y' + 9y = 0$

Eq. característica: $4r^2 + 12r + 9 = 0$

$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$

$\therefore r = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$

Logo, $y_1 = e^{-\frac{3}{2}x}$ é uma sol. da EDO.

$y_2 = xe^{-\frac{3}{2}x}$ também é uma sol. (verifique!) e y_1 e y_2 são LI.

Portanto, $y = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{3}{2}x}$ é a sol. geral da EDO.

3) $y'' - 6y' + 13y = 0$

Eq. característico: $r^2 - 6r + 13 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16 < 0$

$\therefore r = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i \Rightarrow r_1 = 3+2i$ e $r_2 = 3-2i$

Logo, $y_1 = e^{(3+2i)x}$ e $y_2 = e^{(3-2i)x}$ são sol. da EDO.

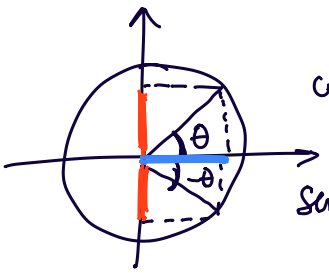
Portanto, $y = c_1 e^{(3+2i)x} + c_2 e^{(3-2i)x}$ é a sol. geral da EDO.

Fórmula de Euler: $e^{\theta i} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

$y_1 = e^{(3+2i)x} = e^{3x+2xi} = e^{3x} \cdot e^{2xi}$

$= e^{3x}\left[\cos(2x) + i\,\text{sen}(2x)\right]$

$$y_2 = e^{(3-2i)x} = e^{3x}\left[\cos(-2x) + i\,\mathrm{sen}(-2x)\right]$$



$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$

Assim,

$$y = c_1 e^{(3+2i)x} + c_2 e^{(3-2i)x}$$

$$= c_1 e^{3x}\left[\cos(2x) + i\,\mathrm{sen}(2x)\right] + c_2 e^{3x}\left[\cos(-2x) + i\,\mathrm{sen}(-2x)\right]$$

$$= e^{3x}\left[c_1\cos(2x) + c_1 i\,\mathrm{sen}(2x) + c_2\cos(-2x) + c_2 i\,\mathrm{sen}(-2x)\right]$$

$$= e^{3x}\left[c_1\cos(2x) + c_1 i\,\mathrm{sen}(2x) + c_2\cos(2x) - c_2 i\,\mathrm{sen}(2x)\right]$$

$$= e^{3x}\left[\underbrace{(c_1+c_2)}_{C_1}\cos(2x) + \underbrace{(c_1 i - c_2 i)}_{C_2}\mathrm{sen}(2x)\right]$$

$$= e^{3x}\left[C_1\cos(2x) + C_2\,\mathrm{sen}(2x)\right], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Resumindo: $ay'' + by' + cy = 0$, $ar^2 + br + c = 0$

$\Delta > 0$: $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

$\Delta = 0$: $r = r_1 = r_2$, $r \in \mathbb{R}$, $y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$

$\Delta < 0$: $r = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, $y = e^{\alpha x}\left[c_1\cos(\beta x) + c_2\,\mathrm{sen}(\beta x)\right]$.

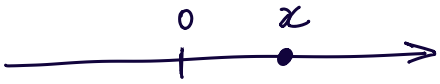
$\sqrt{x}$, $x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$

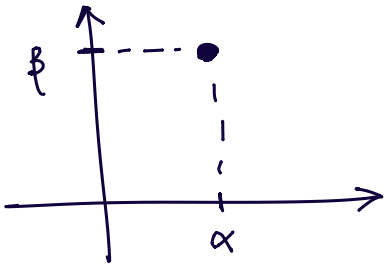
$\sqrt{-16} = \sqrt{(-1)\cdot 16} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{16}$

$\boxed{\sqrt{-1} = i}$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha + \beta i \in \mathbb{C} \iff (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$





$\beta = 0 : \alpha + \beta i \in \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$