EDO: $y = y(x)$, $y' + \cos x\, y = 0$, $x y'' + \frac{1}{x} y' + 7y = \ln x$

Separável: $f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$

Eq. lineares de 1ª ordem

Uma EDO é linear de 1ª ordem se pode ser escrita como

$$y' + P(x)\, y = Q(x)$$

onde, P e Q são contínuas em algum intervalo.

Por exemplo,

$$y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{2}_{Q(x)}$$

P e Q são contínuas em $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

$$y' + \frac{1}{x} y = 2 \overset{(x\,x)}{\Rightarrow} xy' + y = 2x \Rightarrow (xy)' = 2x$$

($xy = 1\cdot y + x y'$)

$$\Rightarrow \int (xy)'\,dx = \int 2x\,dx \Rightarrow xy = x^2 + c \overset{(\div x)}{\Rightarrow} \boxed{y = x + \frac{c}{x}}$$

De fato,

$$y = x + \frac{c}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{c}{x^2}$$

$$\therefore \underbrace{1 - \frac{c}{x^2}}_{y'} + \frac{1}{x}\underbrace{\left(x + \frac{c}{x}\right)}_{y} = 1 - \frac{c}{x^2} + 1 + \frac{c}{x^2} = 2.$$

O segredo é conseguir transformar o lado esquerdo da eq. na derivada de um produto!

De modo geral, dada $y' + P(x)\,y = Q(x)$:

$$y' + P(x)\,y = Q(x) \xrightarrow{(\times \varphi(x))} \varphi(x)\left(y' + P(x)\,y\right) = \varphi(x)\,Q(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi(x)\cdot y' + \varphi(x)\,P(x)\,y}_{(\varphi(x)\cdot y)'} = \varphi(x)\,Q(x)$$

$(\varphi(x)\cdot y)'$ para alguma $\varphi(x)$?

$$\cancel{\varphi(x)\,y'} + \varphi(x)\,P(x)\,y = (\varphi(x)\,y)'$$

$$= \varphi'(x)\cdot y + \cancel{\varphi(x)\cdot y'}$$

$$\Rightarrow \varphi(x)\,P(x)\,y = \varphi'(x)\,y \quad (\text{é uma EDO em } \varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{P(x)\cdot \cancel{y}}{\cancel{y}} = \frac{1}{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x) \Rightarrow \frac{1}{\varphi}\cdot\varphi' = P(x) \quad (\text{é separável})$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\varphi}\,d\varphi = \int P(x)\,dx \Rightarrow \ln|\varphi| + c = \int P(x)\,dx \Rightarrow |\varphi| = e^{\int P(x)\,dx - c}$$

$$\Rightarrow \varphi = \pm e^{\int P(x)\,dx - c} = \pm e^{\int P(x)\,dx}\cdot e^{-c} \Rightarrow \boxed{\varphi = \cancel{k}\, e^{\int P(x)\,dx}} \quad (k>0)$$

fator integrante

podemos desconsiderar

Exemplos: 1) $y' + \frac{1}{x}\,y = 2$

Fator integrante: $\varphi = k\,e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = k\,e^{\ln|x| + \cancel{c}} = k\,e^{\ln|x|}\cdot e^{c}$

$= k e^{c}\cdot|x| = (\pm k e^{c})\,x = \cancel{C}\,x \quad (C \neq 0)$

Multiplicando a EDO por φ:

$\cancel{dx}\left(y' + \frac{1}{x}y\right) = \cancel{dx}\cdot 2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow y = x + \frac{c}{x}$

2) $y' + \underbrace{3x^2}_{P} y = \underbrace{6x^2}_{Q}$ (linear)

$\varphi = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$ (escolhendo a primitiva com $c=0$)

$\therefore \underbrace{e^{x^3}\left(y' + 3x^2 y\right)}_{(e^{x^3}\cdot y)' = e^{x^3}\cdot 3x^2 \cdot y + e^{x^3}\cdot y'} = e^{x^3}\cdot 6x^2 \Rightarrow e^{x^3}y' + 3x^2 e^{x^3} y = 6x^2 e^{x^3}$

$\Rightarrow (e^{x^3} y)' = 6x^2 e^{x^3} \Rightarrow \int (e^{x^3} y)' dx = \underbrace{\int 6x^2 e^{x^3} dx}_{\text{(I)}}$

Resolvendo (I) por substituição:

$u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \overset{(\times 2)}{\Rightarrow} 2du = 6x^2 dx$

$\therefore \int 6x^2 e^{x^3} dx = \int e^u \cdot 2du = 2\int e^u du = 2e^u + C = 2e^{x^3} + C$

Assim, voltando para a EDO:

$e^{x^3}\cdot y = 2e^{x^3} + C \Rightarrow \boxed{y = 2 + Ce^{-x^3}}$

3) $x^2 y' + xy = 1,\ x > 0 \overset{(\div x^2)}{\Rightarrow} y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$ (linear)

$\varphi = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$

$\therefore x\left(y' + \frac{1}{x}y\right) = x\,\frac{1}{x^2} \Rightarrow \underbrace{xy' + y}_{(xy)'} = \frac{1}{x} \Rightarrow (xy)' = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \int (xy)' dx = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow xy = \ln x + C \Rightarrow y = \frac{\ln x + C}{x}$$