Equações diferenciais

Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação que relaciona uma função incógnita e suas derivadas.

A ordem de uma EDO é dada pela ordem da maior derivada presente na equação.

Uma solução de uma EDO é uma função que satisfaz a equação.

Exemplos: 1) $f'(x) = x^3$ é uma EDO de ordem 1 e $f(x) = \frac{x^4}{4}$ é uma solução da EDO. Sua sol. geral é $f(x) = \frac{x^4}{4} + C$.

Notação: $f(x) = y$, $f'(x) = y'$, ...

$y' = x^3$ (y é função de x) $\frac{dy}{dx} = y'$

ou

$\frac{dy}{dx} = x^3$

2) $y'' - 5y' + 6y = 0$ é uma EDO de ordem 2.

Observe que, se $y = e^{2x}$:

$y' = e^{2x} \cdot 2 \Rightarrow y'' = e^{2x} \cdot 4$.

$\therefore 4e^{2x} - 5 \cdot 2e^{2x} + 6 \cdot e^{2x} = 4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0$

Logo, $y = e^{2x}$ é solução da EDO.

Analogamente, $y = e^{3x}$ também é sol., pois

$y' = 3e^{3x} \Rightarrow y'' = 9e^{3x}$

$\therefore\ 9e^{3x} - 5\cdot 3e^{3x} + 6\cdot e^{3x} = 9e^{3x} - 15e^{3x} + 6e^{3x} = 0.$

E $y = e^{4x}$?

$y' = 4e^{4x} \Rightarrow y'' = 16e^{4x}$

$\therefore\ 16e^{4x} - 5\cdot 4e^{4x} + 6e^{4x} = 16e^{4x} - 20e^{4x} + 6e^{4x} = 2e^{4x} \neq 0$

$x = 0 : 2e^{4\cdot 0} = 2 \neq 0.$

Portanto, $y = e^{4x}$ não é sol. da EDO.

3) $P(t)$: população no instante de tempo t.

Assumindo que a taxa de crescimento (P') da população é proporcional (constante k) a quantidade de indivíduos (P) da população:

$P' = kP$ é EDO de 1ª ordem.

$$\left(\int P'\,dt = k\int P\,dt \right) \qquad P = K\int P\,dt \ (?)$$

$P = e^{kt} \Rightarrow P' = ke^{kt}$

$\therefore\ P' = kP \Rightarrow ke^{kt} = ke^{kt}$ ✓

$P(t) = e^{kt}$ é sol. da EDO.