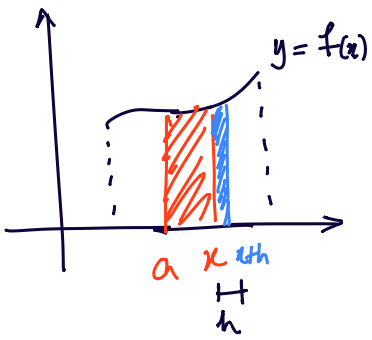
# Teorema Fundamental do Cálculo




$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt = A$$

Tome $h$ pequeno:

$$g(x+h) - g(x) \approx h \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \quad \therefore \quad f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

**Teorema:** (TFC 1) Se $f$ é contínua em $[a,b]$, então $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $(a,b)$ com $g'(x) = f(x)$

**Exemplos:** $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$, como $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ é contínua, pois é composta de soma de contínuas, podemos aplicar o Teorema: $g'(x) = \sqrt{1+x^2}$

2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^4} \sec t\,dt \neq \sec x.$

$$G(x) = \int_0^{x^4} \sec t\,dt \;, \quad F(x) = x^4 \;, \quad g(x) = \int_0^x \sec t\,dt$$

$$\therefore g(F(x)) = g(x^4) = \int_0^{x^4} \sec t\,dt = G(x)$$

$$\Rightarrow G'(x) = \left[g(F(x))\right]' = g'(F(x)) \cdot F'(x) = \sec(F(x)) \cdot 4x^3 = \sec(x^4)\cdot 4x^3.$$

3) $G(x) = \int_{-x^2}^{x^2} 1-t\,dt = \int_{-x^2}^{0} 1-t\,dt + \int_{0}^{x^2} 1-t\,dt$

$= -\int_{0}^{-x^2} 1-t\,dt + \int_{0}^{x^2} 1-t\,dt$

$\Rightarrow G'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\int_{0}^{-x^2} 1-t\,dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{x^2} 1-t\,dt\right)$

$= -\left[1-(-x^2)\right]\cdot(-2x) + \left(1-x^2\right)\cdot 2x$

$= 2x\left[1+x^2\right] + 2x\left(1-x^2\right)$

$= 2x\left[(1+x^2)+(1-x^2)\right] = 2x\cdot 2 = 4x.$

Observe que o TFC 1 diz que:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Teorema: (TFC 2) Se $f$ é contínua em $[a,b]$ e $F(x)$ é uma primitiva de $f$ em $[a,b]$, então (qualquer uma)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Observe que: como $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

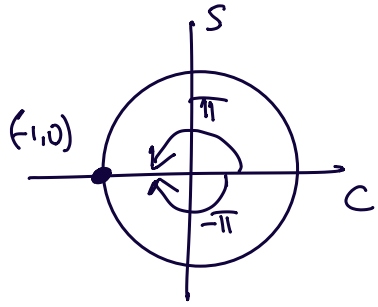
Exemplos: 1) $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + C$

$F(1) - F(0) = \frac{1^3}{3} + C - \left(\frac{0^3}{3} + C\right) = \frac{1}{3} + C - C = \frac{1}{3}$.

2) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = \underbrace{-\cos x}_{F(x)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \underbrace{-\cos\pi}_{F(\pi)} - \underbrace{\left[-\cos(-\pi)\right]}_{F(-\pi)}$ (TFC)

$= -(-1) - [-(-1)] = 1 - 1 = 0$.




Notação:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

3) $\int_0^1 3x^2 - 2x + 2\,dx = x^3 - x^2 + 2x\Big|_0^1$

$= 1^3 - 1^2 + 2\cdot 1 - (0^3 - 0^2 + 2\cdot 0) = 2$.

Definição: Integral indefinida

$\int f(x)\,dx = F(x)$, onde $F'(x) = f(x)$.