Fundamentos de Matemática 3

Método da bisseção

Prof. Adriano Barbosa

FACET — UFGD

06 de fevereiro de 2018

Jogo: adinhe o número

Adivinhar um número entre 1 e 100 onde as possíveis respostas são "correto", "chute mais alto" e "chute mais baixo".

Jogo: adinhe o número

Adivinhar um número entre 1 e 100 onde as possíveis respostas são "correto", "chute mais alto" e "chute mais baixo".

É possível resolver com no máximo 7 chutes.

Solução de equações

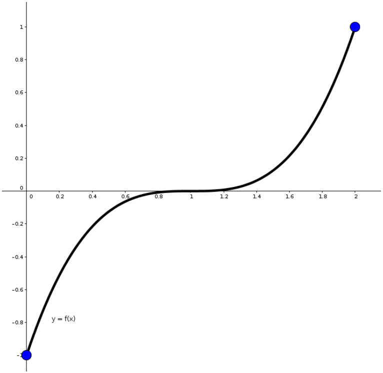
Dada uma função polinomial $f(x)$ de grau n, como encontrar uma raiz real para a equação $f(x) = 0$?

Teorema do Valor Intermediário

Suponha $f(x)$ uma função polinomial com $f(a)$ e $f(b)$ tendo sinais opostos. Então existe um número $p \in (a, b)$ tal que $f(p) = 0$.

Teorema do Valor Intermediário

Suponha $f(x)$ uma função polinomial com $f(a)$ e $f(b)$ tendo sinais opostos. Então existe um número $p \in (a, b)$ tal que $f(p) = 0$.

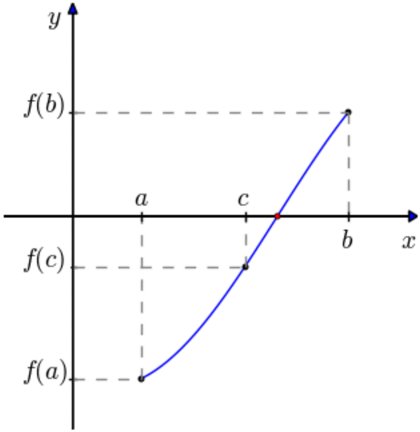


Método da biseção

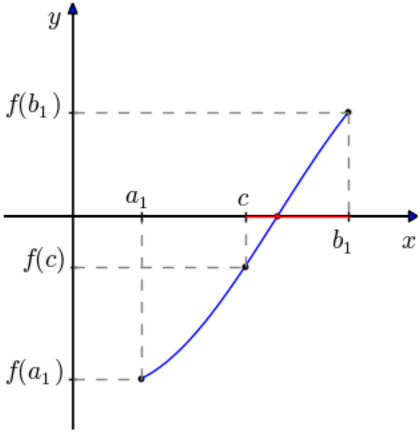
Assumindo uma única raiz no intervalo (a, b):

- Calcule c, ponto médio do intervalo
- Tome o intervalo onde f tem sinal diferente nos extremos, (a, c) ou (c, b)
- Repita o procedimento para o intervalo escolhido

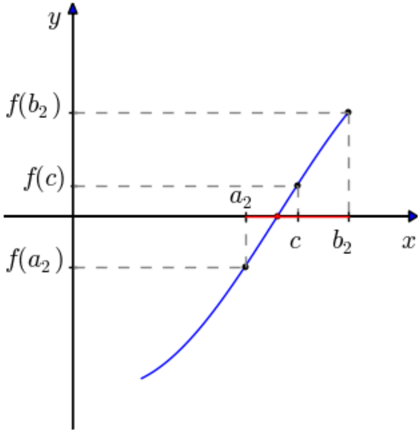
Método da biseção



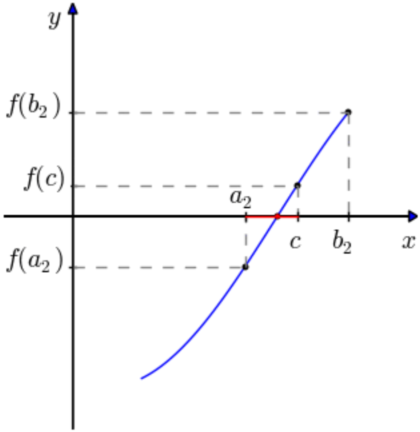
Método da biseção



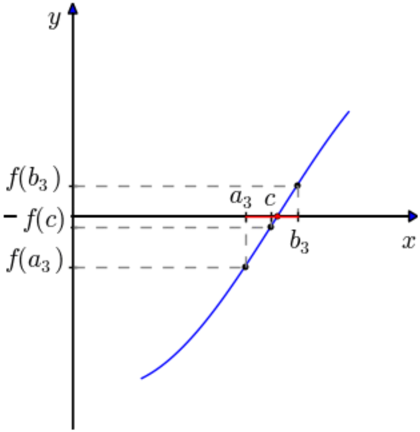
Método da biseção



Método da biseção



Método da biseção



Exemplo

Mostre que $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ possui uma raiz no intervalo $(1, 2)$. Use o método da Bisseção para encontrar uma aproximação da raiz.

Exemplo

Mostre que $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ possui uma raiz no intervalo $(1, 2)$. Use o método da Bisseção para encontrar uma aproximação da raiz.

Como $f(1) = -5$ e $f(2) = 14 \overset{TVI}{\Rightarrow}$ existe $p \in (1, 2)$ tal que $f(p) = 0$

Exemplo

$f(1) = -5$ e $f(2) = 14$

$[1, 2]$ $\quad p_1 = 1.5 \quad f(1.5) = 2.375 > 0$

Exemplo

$f(1) = -5$ e $f(2) = 14$

$[1, 2]$	$p_1 = 1.5$	$f(1.5) = 2.375 > 0$
$[1, 1.5]$	$p_2 = 1.25$	$f(1.25) = -1.796875 < 0$

Exemplo

$f(1) = -5$ e $f(2) = 14$

$$\begin{array}{lll} [1, 2] & p_1 = 1.5 & f(1.5) = 2.375 > 0 \\ [1, 1.5] & p_2 = 1.25 & f(1.25) = -1.796875 < 0 \\ [1.25, 1.5] & p_3 = 1.375 & f(1.375) = 0.162109375 > 0 \end{array}$$

Exemplo

$f(1) = -5$ e $f(2) = 14$

$$
\begin{array}{lll}
[1, 2] & p_1 = 1.5 & f(1.5) = 2.375 > 0 \\
[1, 1.5] & p_2 = 1.25 & f(1.25) = -1.796875 < 0 \\
[1.25, 1.5] & p_3 = 1.375 & f(1.375) = 0.162109375 > 0 \\
[1.25, 1.375] & p_4 = 1.3125 & f(1.3125) = -0.848388671875 < 0
\end{array}
$$

Exemplo

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	1.0	2.0	1.5	2.375
2	1.0	1.5	1.25	−1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	−0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	−0.35098
6	1.34375	1.375	1.359375	−0.09641
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.03236
8	1.359375	1.3671875	1.36328125	−0.03215
9	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.000072
10	1.36328125	1.365234375	1.364257813	−0.01605
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	−0.00799
12	1.364746094	1.365234375	1.364990235	−0.00396
13	1.364990235	1.365234375	1.365112305	−0.00194

Estimando o erro

Teorema:
Se f é uma função polinomial com $f(a)f(b) < 0$, o método da Bisseção gera uma sequência $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que se aproxima de um zero p de f com

$$|p_n - p| \leqslant \frac{b-a}{2^n}, \text{ para } n \geqslant 1$$

Exemplos

jogo:

$$|p_n - p| \leqslant \frac{100-1}{2^n} = \frac{99}{2^n}$$

Exemplos

jogo:

$$|p_n - p| \leqslant \frac{100 - 1}{2^n} = \frac{99}{2^n} < 1 \Rightarrow 99 < 2^n$$

Exemplos

jogo:

$$|p_n - p| \leqslant \frac{100-1}{2^n} = \frac{99}{2^n} < 1 \Rightarrow 99 < 2^n$$

$$\Rightarrow n > \log_2(99) \approx 6.629$$

Exemplos

jogo:

$$|p_n - p| \leqslant \frac{100-1}{2^n} = \frac{99}{2^n} < 1 \Rightarrow 99 < 2^n$$

$$\Rightarrow n > \log_2(99) \approx 6.629$$

eq. 3° grau: *erro* $< 10^{-3}$

$$|p_n - p| \leqslant \frac{2-1}{2^n} = \frac{1}{2^n} < 10^{-3} \Rightarrow 10^3 < 2^n$$

$$\Rightarrow n > \log_2(10^3) \approx 9.96$$

Exemplos

O Teorema fornece um limitante para o número de iterações, mas em muitos casos esse limitante é maior do que o número de iterações realmente necessário.

Exemplos

O Teorema fornece um limitante para o número de iterações, mas em muitos casos esse limitante é maior do que o número de iterações realmente necessário.

A raiz da equação do 3° grau até a nona casa decimal é $p = 1.365230013$ e

$$|p - p_9| = |1.365230013 - 1.365234375| \approx 4.36 \times 10^{-6}$$