Teorema: Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente, então existe algum v_i que pode ser escrito como combinação linear dos demais e vice-versa.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \vec{0}, \quad a_i \neq 0$$

$$\Rightarrow a_i v_i = -a_1 v_1 - \dots - a_{i-1} v_{i-1} - a_{i+1} v_{i+1} - \dots - a_n v_n$$

$$\Rightarrow v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \dots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \dots - \frac{a_n}{a_i} v_n$$

Uma **base** de um espaço vetorial é um conjunto de vetores linearmente independente e que gera o esp. vet.

Exemplos: 1) $S = \{(1,0), (0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. De fato,

- $a(1,0) + b(0,1) = (0,0) \Rightarrow (a,b) = (0,0) \Rightarrow a = b = 0$

  $\therefore$ S é LI

- Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

  $a(1,0) + b(0,1) = (x_0, y_0) \Rightarrow (a,b) = (x_0, y_0) \Rightarrow a = x_0, b = y_0$

  $\therefore$ S gera $\mathbb{R}^2$.

Ex.: $(3,2) = 3(1,0) + 2(0,1)$

$\{(1,0), (0,1)\}$ é chamado de base canônica de $\mathbb{R}^2$.

2) De modo análogo $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ (i, j, k) é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

$$e_i = (0,0,\ldots,\underset{\uparrow}{1},\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$$

↑ i-ésima coord.

A base canônica de $\mathbb{R}^n$ é $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

$$e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$$
$$e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0,0,0,\ldots,0,1)$$

3) $\{(1,0),(1,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$?

$$a(1,0) + b(1,1) = (0,0) \Rightarrow (a+b, b) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow a=0$$

$\therefore$ é LI

Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

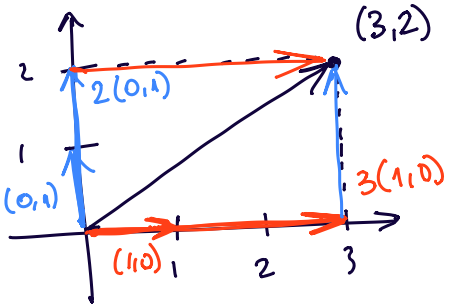
$$a(1,0) + b(1,1) = (x_0, y_0) \Rightarrow (a+b, b) = (x_0, y_0) \Rightarrow \begin{cases} a+b=x_0 \\ b=y_0 \end{cases} \Rightarrow a = x_0 - y_0$$

Ex.:

$$(3,2) = \underbrace{(3-2)}_{=1}(1,0) + 2(1,1) = 1(1,0) + 2(1,1)$$

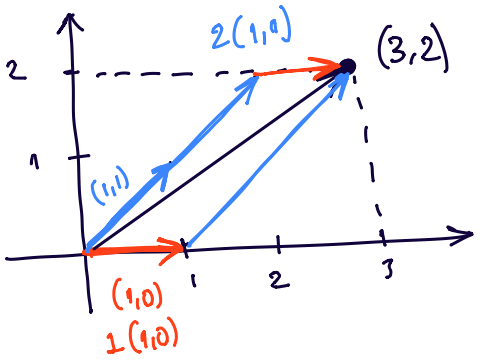
Portanto, $\{(1,0),(1,1)\}$ também é base de $\mathbb{R}^2$.

$\{(1,0),(0,1)\}$



$3(1,0) + 2(0,1) = (3,2)$

$\{(1,0),(1,1)\}$



$1(1,0) + 2(1,1) = (3,2)$

4) $\{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$?

Dado $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$a(1,0) + b(1,1) + c(0,1) = (x_0,y_0) \Rightarrow (a+b, b+c) = (x_0,y_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = x_0 \\ b+c = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x_0 - b \\ c = y_0 - b \end{cases}, \quad \forall\, b \in \mathbb{R}$$

Ex.: $(3,2) \stackrel{?}{=} (3-b)(1,0) + b(1,1) + (2-b)(0,1)$

$$= (3 - \cancel{b} + \cancel{b}, \cancel{b} + 2 - \cancel{b})$$

$\therefore$ gera $\mathbb{R}^2$

Observe que $(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$ $\therefore$ é LD

Portanto, $\{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ <u>não</u> é base de $\mathbb{R}^2$.

Teorema: No espaço $\mathbb{R}^n$:

1) Um conjunto com mais de n vetores é sempre LD.

2) Um conjunto com menos de n vetores não pode gerar $\mathbb{R}^n$.

Corolário: Toda base de $\mathbb{R}^n$ tem exatamente n vetores.

Para ser LI, o conj. deve ter no máximo n vetores.

Para gerar, o conj. deve ter pelo menos n vetores.

Portanto, para ser base, o conj. deve ter exatamente n vetores.

A **dimensão** de um espaço vetorial é igual ao número de vetores de qualquer uma de suas bases.

Exemplos: 1) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

2) Qual a dimensão de $M_{2\times 2}$? $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$\therefore$ S gera $M_{2\times 2}$.

$$a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow a = b = c = d = 0$$

$\therefore$ S é LI

Assim, S é base de $M_{2\times 2}$. Portanto, $\dim M_{2\times 2} = 4$.